

Maestrando: Juan Carlos Patiño Echeverría.

Título del proyecto: Del triángulo didáctico al grafo completo K_4 : nuevas aristas en los procesos de enseñanza-aprendizaje en la era tecnológica.

Director: Fernando Acero.

Programa de posgrado: Maestría en Educación Superior.

RESUMEN

Desde el crecimiento masivo de Internet en los noventa, el uso de herramientas tecnológicas en los hogares y en las instituciones educativas se ha desarrollado exponencialmente. Es indudable que estamos inmersos en una sociedad atravesada por el conocimiento y la comunicación en la que el empleo de nuevos dispositivos físicos, desde pizarrones inteligentes o computadoras portátiles hasta *softwares* que permiten la interacción y comunicación en tiempo real, se convirtió en una necesidad.

Es evidente que estas nuevas herramientas han modificado la forma en la que se realizan ciertas actividades. El correo electrónico, por ejemplo, simplificó la manera en la que nos comunicamos: hizo simple e inmediato el envío de correspondencia escrita y, a la vez, eliminó el lugar que ocupaba el fax. Al mismo tiempo, su inclusión ocasionó algunos problemas, como, por ejemplo, el envío y recepción de correos fuera del horario laboral, por un lado, y la necesidad imperiosa de responder al instante, por el otro. Este fenómeno trajo consecuencias, por ejemplo, el aumento de ansiedad y estrés en algunos trabajadores, situación que llevó a algunos países, como Francia, a crear leyes para permitir a los empleados “desconectarse” de su trabajo fuera del horario laboral¹.

Así como el correo electrónico cambió los modos de comunicación dentro del ambiente laboral y personal, en simultáneo, otras herramientas tecnológicas, que se incorporaron a la vida cotidiana, alteraron y transformaron a distintos sectores de la sociedad. En el terreno educativo, favorecieron la propagación del acceso a la educación, permitieron el incremento de las oportunidades de comunicación y colaboración y modificaron los roles de docentes y

¹ <https://www.theguardian.com/money/2016/dec/31/french-workers-win-legal-right-to-avoid-checking-work-email-out-of-hours>

III

estudiantes. La presente tesis está interesada en mostrar cómo la tecnología ha impactado en el modo de producir y hacer circular conocimiento y cómo esto se relaciona con la tríada clásica docente-saber-estudiante. La idea es presentar una reinterpretación del tradicional triángulo didáctico expuesto por Houssaye (1988) que se adecúa a la realidad en la que estamos insertos: una sociedad tecnológica. Se postula un modelo didáctico desde una perspectiva topológica, en el sentido de que no es relevante la forma o geometría del modelo, sino la estructura que subyace en él y cómo esta difiere notablemente de la estructura del triángulo didáctico tradicional. Se discute cómo la adición de un nuevo nodo a la relación tradicional docente-saber-estudiante aporta nuevas maneras de abordar situaciones que ocurren en el proceso de enseñanza-aprendizaje; además, se plantean ejemplos que muestran cómo estas situaciones didácticas se ven reflejadas en la enseñanza de algunos conceptos de Matemática en el nivel universitario.

ABSTRACT

Since the massive growth of the Internet in the 1990s, technological tools in homes and educational institutions have developed exponentially. Undoubtedly, we are immersed in a society permeated by knowledge and communication. The use of new physical devices, from smart boards or laptops to software that allows interaction and communication in real-time, has become a necessity.

These new tools have modified how certain activities are carried out. Email, for example, has simplified the way we communicate it has made it immediate and straightforward to send written correspondence while at the same time eliminating the place of the fax. At the same time, its inclusion caused some problems, such as the sending and receiving of emails outside working hours, on the one hand, and the imperative need to respond instantly, on the other. For example, this phenomenon had consequences, increased anxiety and stress in some workers, a situation that led some countries, such as France, to create laws to allow employees to "disconnect" from their work outside of working hours.²

Just as email changed the modes of communication within the work and personal environment, simultaneously, other technological tools, which were incorporated into daily life, altered, and transformed different sectors of society; in the educational field, they favoured the spread of access to education, allowed an increase in opportunities for communication and collaboration, and modified the roles of teachers and students. This thesis is interested in showing how technology has impacted the way of producing and circulating knowledge and how this is related to the classic teacher-knowledge-student triad. The idea is to present a

² <https://www.theguardian.com/money/2016/dec/31/french-workers-win-legal-right-to-avoid-checking-work-email-out-of-hours>

reinterpretation of the traditional didactic triangle exposed by Houssaye (1988) adapted to the reality in which we are inserted: a technological society. A didactic model is postulated from a topological perspective. The shape or geometry of the model is not relevant but rather the structure that underlies it and how it differs significantly from the form of the traditional didactic triangle. It is discussed how adding a new node to the formal teacher-knowledge-student relationship provides new ways of approaching situations that occur in the teaching-learning process; In addition, examples have been presented that show how these didactic situations are reflected in the teaching of some Mathematics concepts at the university level.

AGRADECIMIENTOS

Mi más sincero agradecimiento a mi tutor Fernando Acero por todo el apoyo, motivación y paciencia durante el desarrollo no sólo de esta tesis sino de mi carrera profesional. Agradezco también al gran equipo de DEMAT: Su, Vicky, Ana, Gi, Moni y Clau, que más que colegas son mis amigas y su apoyo durante toda mi estancia en Argentina significó mucho para mí.

ÍNDICE

Índice de Figuras	IX
Índice de Abreviaturas	XII
INTRODUCCIÓN.....	13
JUSTIFICACIÓN	19
PLANTEO DEL PROBLEMA	21
OBJETIVOS GENERALES Y ESPECÍFICOS.....	25
Objetivo General	25
Objetivos Específicos	25
HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN.....	26
MARCO TEÓRICO	27
CAPÍTULO 1. SOBRE LOS MODELOS TEÓRICOS.....	27
Definición	27
Modelos Matemáticos	29
Teoría de Grafos.....	36
Modelos en Educación	40
Modelos en Didáctica de la Matemática	43
Modelo Científico y Modelo Conceptual	47
CAPÍTULO 2. SOBRE EL TRIÁNGULO DIDÁCTICO (TRD).....	49
El Triángulo Didáctico	49
Antecedentes históricos	50
El planteamiento de Houssaye	52
Críticas al modelo.....	57
Modelos alternativos	62
Investigaciones Relacionadas y Antecedentes	67
CAPÍTULO 3. SOBRE EL USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA EDUCACIÓN	69
Las TIC y la Educación en la Sociedad del Conocimiento.....	69
uso de la tecnología en la enseñanza en los últimos años	77
El concepto de herramientas tecnológicas en el contexto de esta tesis.....	81
CAPÍTULO 4. SOBRE EL MODELO DEL TETRAÉDRO DIDÁCTICO (TED)	83
Metodología y enfoque de la investigación.....	83
Etapas de La Investigación	86

VIII

Desarrollo del Proyecto	88
Propuesta del modelo: El tetraedro didáctico (TED)	106
La tecnología, más allá de una herramienta didáctica	107
Características del modelo.....	116
CONCLUSIONES.....	127
Principales Aspectos que surgen de la investigación	127
Preguntas abiertas y futuras investigaciones	128
Bibliografía	134

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Laurentius de Voltolina.....	13
Figura 2. Triángulo y Circunferencia.	30
Figura 3. Segmento de recta y triángulo.	31
Figura 4. Transformación de la taza en donut.	31
Figura 5. Representación del mapa de Königsberg.	32
Figura 6. Representación del grafo de los puentes de Königsberg.	33
Figura 7. Grafos equivalentes.	34
Figura 8. Grafos no equivalentes.	34
<i>Figura 9. Grafo simple.</i>	<i>37</i>
<i>Figura 10. Dígrafo.</i>	<i>38</i>
<i>Figura 11. Grafo 3-regular.</i>	<i>39</i>
Figura 12. Interacción con situaciones a-didácticas.....	44
Figura 13. Triángulo didáctico.....	49
Figura 14. Triángulo de Oro. (Triangle d'or).	51
Figura 15. Relación entre el triángulo didáctico y las teorías de la didáctica de la matemática.....	56
Figura 16. Esquema del modelo de interacciones didácticas.	63
Figura 17. La enseñanza y el aprendizaje como sistema de comunicación.....	66
Figura 18. Reapertura de la educación superior en América Latina y el Caribe durante COVID-19 a julio del 2021.....	80
Figura 19. Reapertura de la educación superior en América Latina y el Caribe durante COVID-19 a diciembre del 2021.....	81

Figura 20.	94
Figura 21. Representación gráfica de los ejes cartesianos en R^3.	95
Figura 22.	96
Figura 23.	97
Figura 24.	97
Figura 25.	98
Figura 26.	98
Figura 27. Trayectoria α	100
Figura 28. Trayectoria β.	100
Figura 29. Trayectoria α y β en el mismo plano.	101
<i>Figura 30. Trayectorias en diferentes instantes.</i>	102
<i>Figura 31. Camino C1</i>	105
<i>Figura 32. Camino C2</i>	105
Figura 33. Grafo de 4 nodos.	112
<i>Figura 34. Grafo de 4 nodos, construcción del TED.</i>	113
<i>Figura 35. Modelo TED.</i>	115
<i>Figura 36. Relación Docente-Tecnología en el TED.</i>	117
<i>Figura 37. Relación Docente-Tecnología-Saber en el TED.</i>	118
<i>Figura 38. Relación Docente-Tecnología-Saber-Estudiante.</i>	119
<i>Figura 39. Relación Estudiante-Tecnología-Saber.</i>	121
<i>Figura 40. Diferentes representaciones del modelo TED.</i>	122
<i>Figura 41. TRD inmerso en el TED.</i>	123
<i>Figura 42. Relación Docente-Tecnología-Estudiante dentro del TED.</i>	124

<i>Figura 43. Relación Docente-Tecnología-Saber dentro del TED.</i>	125
<i>Figura 44. Relación Estudiante-Tecnología-Saber dentro del TED.</i>	126
Figura 45. Conexión de dos grupos mediante el nodo tecnológico.	130
Figura 46. Conexión de cuatro grupos mediante el nodo tecnológico.	131
Figura 47. Diferentes caminos que conectan Docente con Estudiante.	132
Figura 48. Diferentes configuraciones de dígrafos TED.	133

ÍNDICE DE ABREVIATURAS

Abreviatura	Significado
TRD	Triángulo Didáctico
TED	Tetraedro Didáctico

INTRODUCCIÓN

Una famosa ilustración de Laurentius de Voltolina, Florencia 1300, presenta una clase universitaria en la Italia medieval de alrededor de la segunda mitad del siglo xiv.



Figura 1. Laurentius de Voltolina.

Fuente: Wikimedia Commons.

En la imagen, puede observarse un profesor en el momento que está impartiendo una clase. Está parado sobre un podio con un gran libro abierto ante sí, algunos estudiantes toman notas, hay libros sobre las tarimas, otros estudiantes hablan entre sí, y hasta hay algunos durmiendo. La imagen transmite un clima de gran solemnidad y, sobre todo, una situación estática en la que queda claro que hay una voz que es la que sabe y los demás –por cierto, todos hombres– escuchan en silencio.

¿Qué se mantiene y qué ha cambiado entre las aulas de esa época y las nuestras? En algunas, seguramente, se repite ese modo de enseñar y aprender y pareciera que nada ha cambiado; en otras, ha habido cambios profundos. El ingreso de la tecnología a las aulas durante el siglo xx ha provocado un gran impacto en la forma de producir y de hacer circular el conocimiento, en la forma en que docentes y estudiantes interactúan y en la relación de ellos con los contenidos académicos.

La tecnología ha transformado profundamente la educación y su expansión ha producido cambios sociales, culturales y pedagógicos. Hasta hace unos años, el acceso a la universidad o a las instituciones educativas estaba limitado a una élite, y había que trasladarse a los grandes centros urbanos para recibir educación. Hoy, el mundo digital permite acceder a educación formal y no formal desde los hogares y aprovechar las múltiples y variadas ofertas que existen. Está disponible desde las casas, a través de Internet, una gran cantidad de información y de ofertas para acceder a distintas modalidades de aprendizaje. Por otro lado, este nuevo escenario replantea la relación entre lo local y lo global: las oportunidades de comunicación y cooperación se han incrementado y diversificado muchísimo. Tradicionalmente, el intercambio y la colaboración en el campo de la investigación estaba restringido a un espacio específico (un aula de clase, un laboratorio, una ciudad, un país) y la forma en que se conocían descubrimientos y conclusiones era a través de congresos o encuentros a los que acudían personas de distintos puntos del mundo. En esta época, se acortaron las distancias, por ejemplo, una persona puede asistir en tiempo real a una clase que se imparte en Seúl desde la Ciudad de Buenos Aires a través de una videoconferencia o puede seguir a un equipo científico que se encuentra en una expedición por el Amazonas y recibir día a día notificaciones vía *e-mail* o redes sociales acerca de los hallazgos. Asimismo, los estudiantes pueden compartir sus aprendizajes y colaborar entre

ellos mediante herramientas como Google Docs o Microsoft Teams. La tecnología permitió que las limitaciones geográficas dejaran de ser una barrera para aprender, comunicarse y trabajar en colaboración.

Otro desafío fue el de modificar las relaciones de autoridad: el docente como ente activo (el que enseña, el que posee el conocimiento) y los estudiantes como entes pasivos (los que aprenden, los que carecen del conocimiento). A pesar de que este modelo aún se mantiene en algunos ámbitos, el acceso a la información y las diferentes modalidades de aprendizaje reorganizaron los roles: el docente se ha convertido en un guía del proceso educativo y los estudiantes han adoptado un rol más activo y personalizado, con un mayor compromiso. Ellos tienen la responsabilidad de buscar la información y las herramientas que los ayuden a abordar y comprender las temáticas que se les plantean. En función de esto, algunas instituciones educativas comenzaron, en distintos países, a rediseñar los espacios de aprendizaje teniendo en cuenta que incluyan tecnología y que permitan esta nueva distribución de roles en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Para muchas personas nacidas en los noventa, la tecnología e Internet siempre fueron parte de sus vidas y son su herramienta principal de comunicación. Pese a ser usuarios de libros impresos, bibliotecas y teléfonos, no son estos la primera opción a la hora de comunicarse con amigos, compañeros de clase o profesores ni recursos para buscar información sobre algún tema que les interese. Los llamados *centennials* o generación Z, nacidos a mitad de los noventa, han utilizado Internet, redes sociales y herramientas de última tecnología desde muy jóvenes. En la actualidad, muchos de ellos están en las universidades. Contar con Internet en sus casas, en los lugares de estudio o trabajo les ha creado hábitos y prácticas culturales novedosas. Tradicionalmente, el conocimiento estaba mediado por un docente, centralizado en un programa determinado y la

información se encontraba en los libros. En el presente, Internet les brinda una biblioteca universal al alcance de la mano, imágenes, producciones audiovisuales y un sinnúmero de recursos para satisfacer necesidades e inquietudes, y pueden acceder solos a través de un clic.

Entonces, ¿cuál es la concepción que tienen del rol del docente y del acceso al conocimiento? Es posible que conciban la transmisión de la información de un modo diferente al “tradicional”. ¿Acaso la tecnología e Internet han cambiado la percepción que los estudiantes tienen de lo que es un profesor o de cómo comunicarse entre sí? ¿Cuánto afectan los nuevos desarrollos tecnológicos la idea tradicional de una clase?

La tecnología trajo beneficios e innovaciones, pero también, nuevos problemas que atender, como por ejemplo, falta de personal capacitado para usar herramientas tecnológicas, adecuación de los programas y los tiempos necesarios para desarrollarlos, escasa información sobre el uso de las herramientas o actividades didácticas apropiadas, falta de interés o resistencia ante la incorporación de nuevas herramientas por parte de docentes o directivos –e incluso de algunos alumnos–; y por último, poca investigación y elaboración de teorías.

Respecto a este tema, en la Universidad Argentina de la Empresa (UADE), Bravo y Patiño (2016) realizaron una investigación sobre los errores que cometen los estudiantes de Álgebra y Geometría analítica al apropiarse de los conceptos concernientes a planos y rectas. Los resultados mostraron que muchos de los errores se evidencian en los problemas relacionados con la extensión equivocada de las propiedades del plano R^2 al espacio R^3 . Se observó que esto obedece a que las clases de Matemática, tradicionalmente, se imparten sobre un pizarrón (que contiene objetos en R^2) sobre el que se pretende dibujar figuras tridimensionales; muchas veces, estas no logran alcanzar una buena realización y, tampoco, muestran las propiedades inherentes al espacio 3D. Ante esta situación, uno de los interrogantes fue ¿ayudaría a la comprensión de la

relación entre rectas en el espacio el uso de herramientas didácticas tecnológicas? Una computadora podría simular fácilmente un espacio tridimensional y, quizá así, los estudiantes asimilarían de una mejor manera, conceptos que, en principio, parecen problemáticos.

Dicha experiencia es la impulsora de la presente tesis; a partir de ella, surge la idea de postular un modelo que explique, de un modo sencillo, la interacción entre tecnología, docentes y estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje. El modelo propuesto se basa en el clásico triángulo didáctico desarrollado y difundido por Houssaye (1988), que muestra la interacción entre estudiante, docente y conocimiento, y a este modelo se le agrega un nodo que permite el análisis de cómo la tecnología interactuaría y modificaría la relación entre estos elementos. En el sentido tradicional (el triángulo), si un estudiante quiere “alcanzar el conocimiento”, tiene dos caminos: uno es el camino directo; otro, a través de un docente. Si se agrega un cuarto nodo, las posibilidades se amplían (cinco caminos). Explicar estos nuevos caminos es parte del objetivo de esta tesis. Asimismo, con la creación de este nuevo modelo, se pretende motivar a docentes e investigadores para que inicien o profundicen en el estudio de la tecnología aplicada a la educación.

La primera parte de la tesis expone los principios de lo que se considera un modelo, tanto en Matemática como en educación en general. Además, se explican fundamentos básicos de la teoría de grafos que serán útiles para poder entenderlo y se presentan otros modelos educativos conocidos.

En la segunda parte, se hace un estudio sobre el triángulo didáctico de Houssaye, de suma importancia para esta tesis, y se revelan críticas y estudios referidos a él.

La tercera parte está dedicada a exponer la importancia de la tecnología en la educación y a explicar su injerencia (en particular, en el área de Matemática) tanto en la Argentina como en el resto del mundo.

La parte final desarrolla la propuesta del modelo. En ella, se revela cómo este se obtiene a partir del triángulo didáctico y se ejemplifica con algunas situaciones didácticas particulares en las que se observa su aplicación. También, se ofrecen consideraciones que pueden ser aplicadas en futuros caminos de investigación.

Si bien los resultados y las soluciones presentados están elaborados sobre un número acotado de casos, se pretende que, con las adaptaciones convenientes a distintos contextos, resulten válidos en lo concerniente a las relaciones estructurales de las dimensiones consideradas.

JUSTIFICACIÓN

Esta tesis se centra en el análisis y comprensión de la integración de la tecnología en los procesos actuales de enseñanza y aprendizaje. El propósito de este trabajo es explorar cómo la tecnología, una herramienta cada vez más relevante en la sociedad moderna, impacta en las dinámicas didácticas en el aula, y cómo este impacto puede ser conceptualizado y aprovechado para mejorar la práctica educativa.

Inspirados por experiencias directas en la Universidad Argentina de la Empresa (UADE), especialmente en la enseñanza de conceptos de rectas y planos en Álgebra y Geometría Analítica, nos propusimos desarrollar un modelo que mapeara las interacciones didácticas y el papel cambiante de la tecnología. El objetivo principal de esta investigación es proporcionar una representación que evidencie la relación entre la tecnología y el triángulo didáctico compuesto por el docente, el estudiante y el conocimiento. A su vez, se busca estimular un diálogo crítico que facilite la mejora continua del uso de las herramientas tecnológicas en la educación.

Adicionalmente, se espera que esta tesis sirva como una motivación y una guía para educadores, investigadores y administradores que buscan incorporar la tecnología como un elemento central en sus prácticas de enseñanza. En un mundo cada vez más digital, muchas instituciones educativas se enfrentan al desafío de adaptar sus currículos y metodologías a la evolución tecnológica. Este trabajo pretende ayudar a identificar áreas de mejora y proporcionar una base teórica para el diseño y la implementación de estrategias y actividades pedagógicas que utilicen eficazmente las herramientas tecnológicas.

Finalmente, es crucial enfatizar que la motivación central de este estudio es el impacto en los estudiantes. Son ellos quienes, en última instancia, experimentan las decisiones pedagógicas tomadas por los educadores y los responsables del diseño curricular. Por lo tanto, este trabajo

busca mejorar su experiencia de aprendizaje al explorar y proponer formas óptimas de integrar la tecnología en el aula.

PLANTEO DEL PROBLEMA

Cuando se intenta desarrollar una teoría o empezar una investigación, una de las herramientas básicas por considerar es la creación de un modelo para poder entender el problema. Los modelos científicos sirven para condensar y ejemplificar de manera visual fenómenos físicos o sociales, tanto los más simples y cotidianos como aquellos que presentan cierta complejidad. Este tipo de representación se puede encontrar en distintas ramas del conocimiento, desde la matemática hasta la educación, y varía en formas, tamaños, elementos, etcétera. Sin duda, es una herramienta de inmensa utilidad para desarrollar nuevas teorías y para lograr una mayor comprensión sobre temas particulares.

Uno de los modelos clásicos que existen es el llamado Triángulo Didáctico (TRD), difundido y extendido por Jean Houssaye (1988). Este relaciona saber, docente y estudiantes, como los vértices de un triángulo, y procesos de enseñanza, aprendizaje y formación, como las aristas del mismo triángulo. Si bien este modelo recibió modificaciones y críticas, sin ponerlo en tela de juicio, es la base para muchas investigaciones nuevas relacionadas con la educación y, en especial, con la didáctica.

Nos encontramos en un universo mucho más digital y tecnológico del que conoció Houssaye hace más de treinta años. Hoy, el mundo está atravesado por las nuevas tecnologías y por los medios de información y comunicación: computadoras personales, teléfonos inteligentes, Internet, plataformas digitales, entre otros. Estas son solo algunas de las herramientas tecnológicas con las que interactuamos. Estamos en una sociedad en la que un niño aprende a usar una *tablet* antes de aprender a leer. Como cuenta Giovanni Sartori en *Homo Videns: la sociedad teledirigida*, “El video está transformando al *Homo sapiens*, producto de la cultura

escrita, en un *Homo videns*, para quien la palabra ha sido destronada por la imagen” (Sartori, 1998, pág. 11).

Todo este *boom* de desarrollo tecnológico, indudablemente, genera un efecto en la forma cómo se enseña y se aprende; por eso, las instituciones educativas deberían adaptarse a las transformaciones que provoca tanto en docentes como en estudiantes y considerar el impacto que la presencia de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación produjeron en la sociedad y en el sistema educativo. Este hecho alcanza, entonces, a modelos clásicos como el TRD, por esta razón, un modelo actualizado y adecuado a la nueva realidad nos podría dar pistas de cómo avanzar y cómo utilizar estas nuevas herramientas.

Una investigación llevada a cabo en la UADE por Bravo y Patiño (2016) mostró, entre otros resultados, que algunos de los errores más frecuentes que cometen los estudiantes de Álgebra y Geometría analítica están relacionados con las dificultades de representación visual de los objetos tridimensionales. Estos, fáciles de modelar en una computadora, son tradicionalmente dibujados a mano sobre un pizarrón; no solo en esta universidad, lo mismo ocurre en otras universidades de la Argentina. La acotada investigación dio lugar a un debate y posterior análisis de cómo se podrían empezar a utilizar en forma más natural y recurrente herramientas tecnológicas en el aula.

Ibáñez (2007) fue uno de los investigadores que desarrolló una nueva formulación del TRD. En su modelo, conocido como Modelo de las Interacciones Didácticas, hace referencia a conceptos claves, como “episodio instruccional”, “objetivo instruccional” o “discurso didáctico”. Lo que pretende el autor, en su modelo, es subsanar errores lógicos del TRD abordándolos desde un sentido filosófico. Gvirtz y Palamidessi (2008), también, hicieron algunas modificaciones al modelo clásico de Houssaye, y plantean la enseñanza y el aprendizaje como un sistema de

comunicación. En su modelo, identifican cuatro factores que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje: aprendices, enseñantes, contenidos y problemas. A pesar de que las dos investigaciones esbozan algunas críticas y modificaciones sobre el modelo clásico e incorporan nuevos componentes en los procesos de enseñanza, ninguna menciona la penetración de la tecnología ni de su uso.

Por otra parte, en *Managing Technology in Higher Education: Strategies for Transforming Teaching and Learning*, Bates y Sangrà (2011), a partir de una investigación sobre el uso de la tecnología, realizada en 25 universidades de distintos países, proponen diversos puntos de vista y algunas recomendaciones importantes sobre su uso en las aulas universitarias. Los autores abordan la temática desde los cambios que hubo en la sociedad hasta el desarrollo de la tecnología usada en las aulas en la actualidad; para ello, toman aspectos de vital importancia, como los concernientes al aspecto administrativo de las instituciones educativas y a las finanzas requeridas para implementar ciertas políticas. Sin embargo, no se detienen a analizar en detalle la conceptualización de un modelo nuevo que manifieste el impacto de la tecnología en los modelos clásicos de la didáctica.

La motivación principal de esta tesis es resaltar el rol protagónico que la tecnología juega en la interacción entre estudiante-saber-docente; lo que, con seguridad, se constituirá en la guía que cree los fundamentos para analizar cómo el perfeccionamiento en el uso de herramientas tecnológicas puede colaborar en el desarrollo de las capacidades de los estudiantes. Para ello, en esta primera etapa, se presenta y explica un modelo que expande el TRD agregando como vértice fundamental la tecnología; un modelo interpretado dentro de un marco topológico, específicamente, dentro de la teoría de grafos. El objetivo es analizar, desde un punto de vista novedoso, la problemática clásica de la didáctica educativa. Este modelo sirve como herramienta

fundamental para empezar a generar el conocimiento necesario para responder la pregunta
¿Cómo impacta el desarrollo tecnológico en los procesos de enseñanza-aprendizaje en las aulas
universitarias y, en particular, en el modelo del TRD?

OBJETIVOS GENERALES Y ESPECÍFICOS

OBJETIVO GENERAL

Examinar la intersección de la tecnología con los procesos de enseñanza y aprendizaje en las aulas universitarias contemporáneas, a través de la creación y análisis de un modelo que expande el triángulo didáctico tradicional de estudiante-contenido-profesor para incorporar un cuarto vértice, la tecnología.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desarrollar y proponer un modelo conceptual basado en la teoría de grafos que visualice y explique la complejidad de las interacciones entre estudiantes, contenidos, profesores y tecnología, con el fin de representar la realidad del aula actual.
- Profundizar en el entendimiento de cómo las nuevas tecnologías modifican los procesos de enseñanza y aprendizaje tradicionales, a través de un análisis crítico y la proyección de escenarios futuros posibles en la educación.
- Identificar las formas en que la tecnología puede mejorar la comprensión de conceptos que requieren un pensamiento geométrico y espacial, demostrándolo con el análisis de casos específicos, y sugiriendo su aplicación en otros contextos dentro del estudio de las matemáticas y otras disciplinas científicas.

HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Una mejor comprensión de cómo impacta la tecnología en la relación clásica estudiante-saber-docente y la creación de modelos didácticos actualizados de fácil entendimiento permitiría motivar a quienes están involucrados con la educación y mejoraría el uso de herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

La revolución tecnológica ha generado que los estudiantes hoy se comuniquen y aprendan de un modo diferente al establecido por los modelos tradicionales. Debido a esta transformación, es necesario repensar algunos modelos clásicos (como el TRD) para mejorar la forma en cómo se enseña, y así poder actualizar y optimizar los procesos educativos. El impacto tecnológico ha cambiado la manera en que los jóvenes se comunican entre sí, en cómo acceden al conocimiento y la concepción que tienen de la figura del docente respecto del lugar que ocupa en la transmisión de conocimiento.

MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 1. SOBRE LOS MODELOS TEÓRICOS

DEFINICIÓN

En el día a día y a lo largo de nuestra vida hemos estado acostumbrados de alguna manera al concepto de modelo. Se tenga o no una definición concisa de lo que significa, hemos utilizado la expresión en distintos momentos y situaciones: un modelo al que se pinta o se le toma una foto; es decir, en este sentido podríamos entender al modelo como algo a lo que intenta reproducirse. En un plano más comercial tenemos modelos de productos; que designarían a esa muestra de la cual podemos “experimentar” o “probar” para ver si nos gusta el producto final; o también podríamos pensar al modelo en un plano moral como aquella persona ideal “el modelo a seguir” (tomando por supuesto en el mejor de los casos un “modelo” que sea un buen ejemplo que seguir).

Notamos como de alguna manera u otra hemos desarrollado una vaga idea de lo que significa modelo como aquella representación abstracta de la realidad que nos permite experimentar o comprender cierto fenómeno de manera más práctica. Wartofsky (1968) ratifica la importancia de los modelos debido a la capacidad de representar, de manera abstracta, las estructuras formales derivadas de algo que se toma como original. Por lo tanto, se debe cumplir una relación biyectiva entre el modelo y los aspectos de la realidad que se usaron para la construcción de éste, de modo tal que cualquier modificación o análisis que se haga sobre las partes del modelo se vean bien reflejadas en la realidad modelada y a su vez, las diferentes

situaciones que se puedan presentar en la realidad sean bien definidas en el modelo; de esto dependería de que el modelo tenga una utilidad teórica. Al respecto Bunge (1985, pág. 15) escribe:

[...] para apresar la realidad se empieza por apartar información. Se agregan, luego, elementos imaginarios (o más bien hipótesis) pero con una intención realista. Se construye así un *objeto esquemático* y que, para dar frutos, deberá integrarse en una teoría susceptible de ser confrontada con los hechos.

Desde un punto de vista epistemológico, el modelo representa o describe una parte de la realidad en función de supuestos teóricos. Esta descripción de la realidad nunca es completa, sino que muestra solamente los aspectos fundamentales o más relevantes para la teoría. Describir totalmente la realidad es imposible puesto que esta cambia continuamente; razón por la cual el modelo debería ser permeable a modificaciones que hagan que este se adapte o moldee fácilmente a situaciones particulares.

A nivel de las ciencias duras, los modelos científicos han venido siempre de la mano de nuevas ideas para explicar fenómenos de la vida cotidiana y su desarrollo ha podido lograr que de alguna forma muchos otros modelos hayan sufrido un proceso de “matematización” (Sierra Bravo, 1984, pág. 131) que permite dotar al modelo de ciertas estructuras internas similares a las nociones matemáticas relacionadas con conjuntos, relaciones, grupos, entre otros. Además de poderse representar de manera matemática, los modelos pueden expresarse de manera física, simbólica o lingüística y según Echeverría (1999) pueden ser clasificados en relación con la teoría en modelos lógicos, matemáticos, analógicos, teóricos e imaginarios.

MODELOS MATEMÁTICOS

La modelación matemática es una fuente de aprendizaje y enseñanza que involucra ciertos procesos dinámicos que permiten investigar, problematizar y transformar situaciones, fenómenos o datos reales en expresiones matemáticas, es decir, modelos matemáticos. La modelación matemática ha sido utilizada en diferentes campos de las ciencias naturales y sociales. Su uso ha sido vital debido a varios factores que involucran, entre otros, ahorro de tiempo y costo de ejecución, simplificación de problemáticas referidas al lenguaje, parcialidad y facilidad de entrega de resultados.

Un modelo matemático de un fenómeno real es un esquema ideal que consiste en símbolos, gráficos, representaciones u operaciones matemáticas. Este modelo matemático puede ser estudiado o analizado usando las diferentes herramientas creadas por la matemática. Estos modelos han estado presentes durante mucho tiempo y son muchos los ejemplos que podríamos dar de ellos que se aplican en la vida cotidiana y que hemos asimilado de tal manera que es difícil distinguir la naturaleza matemática detrás de ellos. Para tener una idea más clara veamos a continuación algunos modelos matemáticos importantes para el desarrollo de esta tesis.

La Topología

Comprender en un sentido matemático o preciso la definición de topología puede conllevar más de unos años de estudio, intentemos comprender de una manera más intuitiva cuál es su definición. La topología se encarga del estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes cuando éstas son sometidas a contracciones, dilataciones, deformaciones de modo tal que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes; es por este motivo que algunas veces se hace referencia a la topología como “la geometría de chicle (goma)”. Dicho de

otra manera, la noción de semejanza en un sentido topológico difiere de la noción clásica de semejanza que se tiene de la geometría porque en esta última importa, entre otras cosas, la medida, mientras que en la topología no. Podríamos pensar a la topología como una geometría no métrica en la que no se miden distancias sino propiedades más cualitativas.

Pensemos por ejemplo en una circunferencia y un triángulo. Desde un punto de vista geométrico es claro que esas dos figuras son diferentes (una tiene tres lados y tres ángulos internos la otra no) pero desde un punto de vista topológico las dos figuras son equivalentes. Si pensamos en que el contorno de las figuras es moldeable, sería posible mediante algunas manipulaciones o deformaciones convertir una figura en otra.

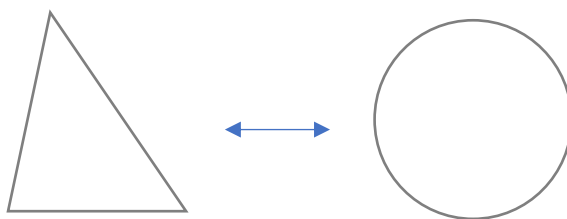


Figura 2. Triángulo y Circunferencia.

Las figuras representan objetos equivalentes desde un punto de vista topológico.

Fuente: Elaboración propia

Entonces queda claro que, si un triángulo y una circunferencia son topológicamente equivalentes, estas dos figuras serían por lo tanto equivalentes a un rectángulo, a un cuadrado, a un pentágono, etc. ¿Pero esto quiere decir que todas las figuras geométricas son topológicamente equivalentes? No propiamente, porque debemos considerar que las transformaciones que realizamos deben respetar dos condiciones: no cortar y no pegar. Así, por ejemplo, un segmento de recta y un triángulo no son lo mismo porque para generar una a partir de la otra se debería o

bien pegar o bien cortar en algún punto. Las transformaciones que son permitidas presuponen que existe una correspondencia biunívoca entre los puntos del objeto inicial y del transformado, y que la transformación hace corresponder puntos próximos a puntos próximos (continuidad) y se requiere que esta transformación y su transformación inversa sean ambas continuas (homeomorfismos).

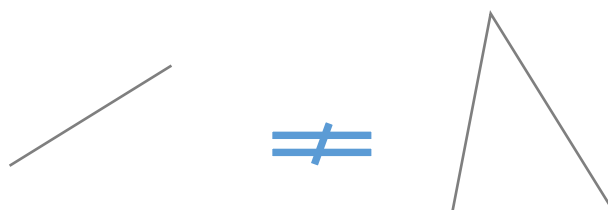


Figura 3. Segmento de recta y triángulo.
 Las figuras representan dos objetos topológicamente distintos.
 Fuente: Elaboración propia.

Es importante reconocer que cuando afirmamos que un segmento de recta y un triángulo son diferentes lo estamos viendo desde el punto de vista topológico, es una diferencia mucho más disruptiva. Cortar o pegar convierte a un objeto en otra cosa estructuralmente diferente, mucho más que la diferencia entre una pelota y un cubo, o un donut y una taza.

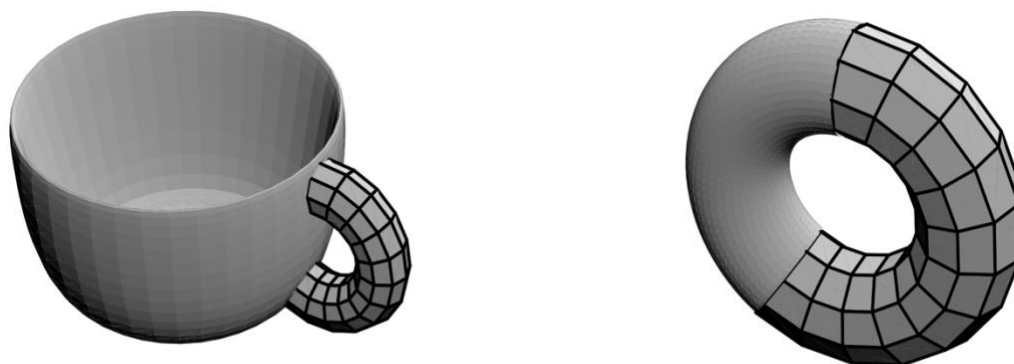


Figura 4. Transformación de la taza en donut.
 Un chiste clásico entre matemáticos dice que un topólogo es una persona que no distingue una taza de un donut. En la imagen podemos apreciar cómo mediante transformaciones continuas podemos convertir un objeto en otro.
 Fuente: Crossley (2010, pág. 61).

Dentro de la rama de la topología podemos encontrar diferentes subcategorías que resultan de interés para la resolución de problemas, así como también para la modelación matemática: teoría de nudos, teoría de superficies y teoría de grafos. Para el desarrollo del siguiente trabajo será de vital importancia esta última así que entraremos un poco más en detalle.

Un problema motivador: El problema de los siete puentes de Königsberg.

En el año 1736, Königsberg, Prusia (lo que se conoce actualmente como Kaliningrado, Rusia) estaba dividida a ambos lados por el río Pregel en el cual hay dos islas: Kneiphof y Lomse, y todos sus territorios estaban unidos por siete puentes (como se muestra en la Figura 5). Los habitantes de la época se preguntaban si era posible recorrer esta ciudad y volver al punto inicial pasando una y sólo una vez por cada uno de los puentes.

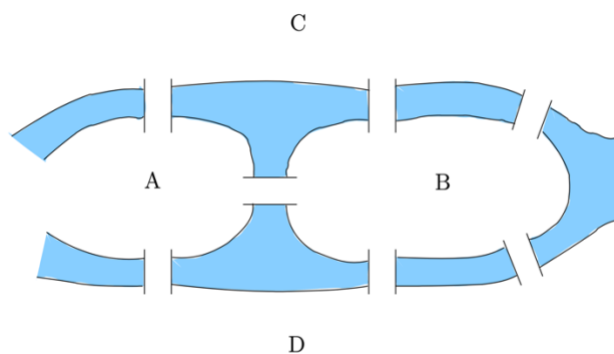


Figura 5. Representación del mapa de Königsberg.
Fuente: Fournier (2013, pág. 198)

Königsberg era un conocido epicentro científico de la época en el que nacieron grandes pensadores como Goldbach, Hamman o Kant; y también fue testigo de la visita de Leonhard Euler, quien terminaría por resolver el problema de los puentes en 1736. Lo primero que realizó Euler fue recurrir a una abstracción del mapa tomando en cuenta únicamente las cuatro regiones

y los siete puentes de la ciudad. A las cuatro regiones las representó con puntos A, B, C y D, y a los puentes que unían esas regiones las representó con líneas que unían los respectivos puntos (como se muestra en la Figura 6).

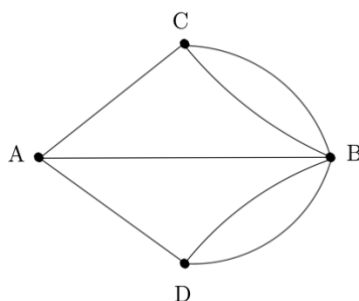


Figura 6. Representación del grafo de los puentes de Königsberg.

Fuente: Fournier (2013, pág. 198)

El problema de los puentes se convierte ahora en un problema análogo pero analizado en una figura abstracta: ¿es posible partir y llegar al mismo punto pasando por todas las líneas una sola vez? Lo que resulta aún más interesante es que la figura realizada por Euler es una representación topológica del problema de los puentes. La distancia que hay de B a C, o de B a D, o la posición en la que se encuentran no tiene importancia, lo que es realmente importante es saber si están conectados o no y es en esa propiedad en la que se encuentra la solución del problema. De esta manera los *grafos* representados en la Figura 7 son equivalentes al de la Figura 6 y por lo tanto equivalentes entre sí, pero no son equivalentes a los de la Figura 8.

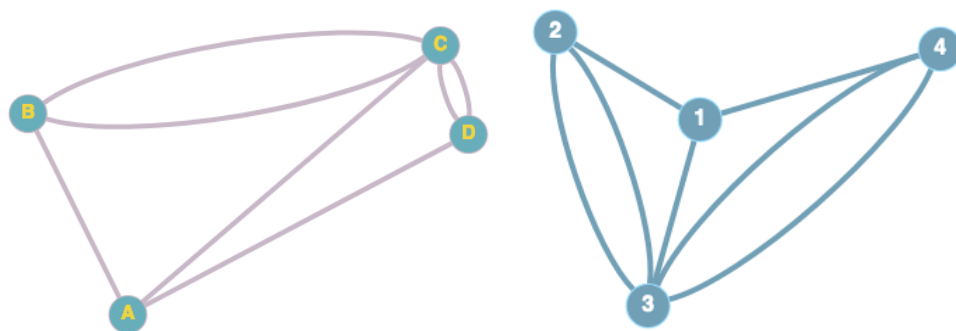


Figura 7. Grafos equivalentes.
Fuente: Elaboración propia

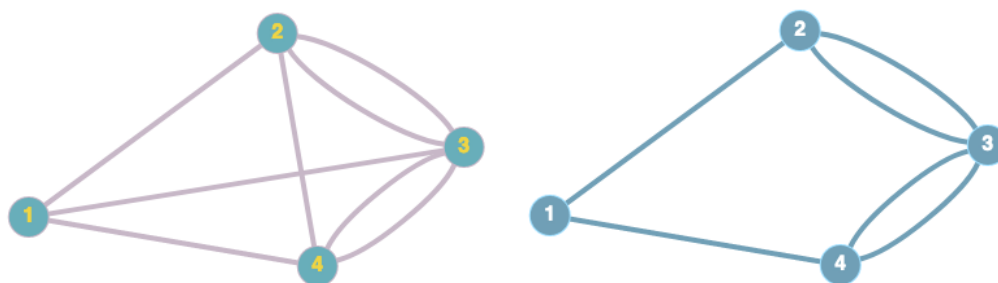


Figura 8. Grafos no equivalentes.
Fuente: Elaboración propia.

Queda claro que los grafos representados en la Figura 8 no son equivalentes al grafo original que representaba al problema de los puentes de Königsberg, pero ¿añadir o quitar un puente cambia las cosas estructuralmente? La respuesta es afirmativa y de hecho determina que el problema tenga solución o no.

Lo primero que se puede intuir es que, si cada punto representa una región y las líneas los puentes, para entrar y salir de cada región por puentes distintos se necesitaría un número par de

líneas unidas a cada punto. Si sumamos la condición de que el punto inicial y final deben ser el mismo, estaríamos forzando a que no exista ningún punto que esté conectado con un número impar de líneas. Observando el grafo, nos damos cuenta de que tres puntos están asociados con tres líneas y un punto con cinco líneas. Usando este razonamiento Euler probó que la respuesta al problema era negativa: *no es posible encontrar un camino por el que se cumplan las condiciones pedidas.*

Más allá de lo entretenido que se pueda encontrar el problema de los puentes de Königsberg, lo interesante está en la aplicación topológica que se hizo de este. El grafo utilizado permite estudiar las propiedades estructurales del problema de una manera más sencilla, pero es el grafo como entidad topológica lo que realmente importa, no su forma, ni sus medidas ni su posición.

Así como esta aplicación de la teoría de grafos ayudó a la resolución de un problema muy básico, hoy en día la teoría de grafos ha sido utilizada en diversas situaciones de la vida cotidiana. El estudio de las redes sociales, la red compleja de nuestro cerebro humano, problemas de transporte, Isómeros, redes de telefonía móvil y muchos otros más son ejemplos de las aplicaciones de los grafos en la modelación matemática.

Si pensamos en Facebook, por ejemplo, cada usuario podría ser representado por un punto, una línea que une dos puntos puede significar que esas personas son amigos en Facebook. El resultado nos llevaría a un conjunto de puntos y líneas que nos permiten analizar las interacciones que tiene un grupo de personas en esa red social. ¿Es importante acaso la longitud de esas líneas o la posición de los puntos en el plano? Por supuesto que no. Sin importar si las personas viven en ciudades diferentes o si viven en el mismo barrio lo que nos importa es si están conectadas en Facebook o no.

De la misma manera como podemos asignar puentes a líneas o puntos a personas, la abstracción que podamos hacer de problemas de la vida real y transformarlo en representaciones matemáticas puede ser muy variada y nos permitiría estudiar a profundidad la estructura que los vincula. Si pensamos en una situación didáctica clásica, podríamos representar por puntos a un estudiante, un profesor y un contenido; las líneas podrían representar si dichos actores están conectados o no. Añadir otro punto u otra línea, ¿cambiarían estructuralmente estas relaciones?

Con el ánimo de darle formalidad a las ideas anteriormente mencionadas, la siguiente sección da definiciones concisas de los conceptos de grafos, líneas o puntos.

TEORÍA DE GRAFOS

La teoría de grafos es la rama de la matemática que estudia las propiedades de los grafos.

Definición 1. Un grafo simple G está formado por un par $(V(G), E(G))$:

- $V(G)$ es un conjunto finito, conocido como el conjunto de vértices de G , y
- $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos de G , llamados aristas, que se denotan por (i, j) .

Por ejemplo, consideremos el grafo $G = (V(G), E(G))$ dado por:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \text{ y } E(G) =$$

$\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_5), (v_3, v_4), (v_4, v_6)\}$. Dicho grafo tendría la siguiente representación:

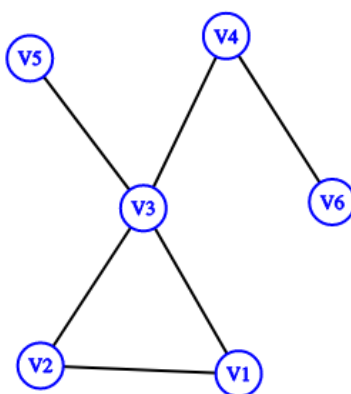


Figura 9. Grafo simple.
Fuente: Elaboración propia

Pese a que la definición de vértice o arista es abstracta y carece por sí sola de aplicación, es posible asignar diferentes interpretaciones a estas. Por ejemplo, retomando el ejemplo de Facebook y las redes sociales, los vértices podrían representar a los usuarios y las aristas representarían la relación de amistad cuando esté presente. Para el grafo de la Figura 9 se podría interpretar que v_5 y v_4 “no son amigos” pero que tienen un amigo en común: v_3 .

Definición 2. El orden n de un grafo es la cantidad de vértices del grafo, es decir $n = |V(G)|$ y el tamaño m de un grafo es la cantidad de aristas de éste, es decir $m = |E(G)|$.

Para nuestro ejemplo de la Figura 9, $n = 6$ y $m = 6$.

Definición 3. Si las aristas están dadas por un conjunto de pares ordenados de vértices se tiene un dígrafo (o grafo dirigido).

Por ejemplo el dígrafo $G = (V(G), E(G))$ dado por: $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_5), (v_3, v_4), (v_4, v_6), (v_6, v_4)\}$ es de orden $n = 6$ y tamaño $m = 8$ tiene representación:

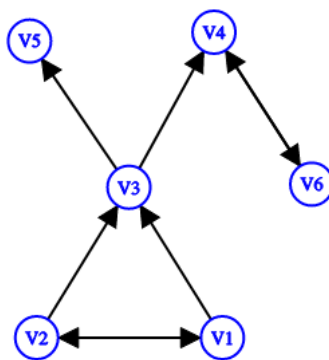


Figura 10. Dígrafo.
Fuente: Elaboración propia

Así como con los grafos, a los dígrafos se les pueda dotar de diferentes interpretaciones. La diferencia radica en la dirección en la que se le da a la relación (arista) entre los vértices. En un dígrafo la relación existe en un determinado sentido en cambio que en un grafo la relación se da en ambos.

Retomando nuestro ejemplo, mientras un grafo podría representar una red social como Facebook, no lo podría hacer en una red social como Twitter. En esta red social la relación “seguir a otro usuario” ocurre en una sola dirección, es decir que cuando un usuario sigue a otro, esto no genera automáticamente que el segundo siga al primero, como la relación se da en un solo sentido, un dígrafo serviría para modelar más fehacientemente esta red social.

Definición 4. Un vértice i es adyacente a otro vértice j en un grafo G si $(i, j) \in E(G)$. Diremos además que i y j son los extremos de la arista. En otras palabras, dos vértices son adyacentes si están relacionados por medio de una arista.

Recordando el problema de los puentes de Königsberg, la cantidad de puentes que entraban o salían de cada región impactaban en que el problema tuviese solución o no. La siguiente

definición formaliza ese aspecto que será uno de los más importantes que analizaremos en los grafos para esta tesis.

Definición 5. El grado de un vértice (se denota $d(v)$) es la cantidad de aristas que inciden sobre v . El grado mínimo del grafo G se denota por $\delta(G)$ y el grado máximo por $\Delta(G)$. Un vértice v se denominará aislado si $d(v) = 0$. Un grafo se llama regular si todos sus vértices tienen el mismo grado.

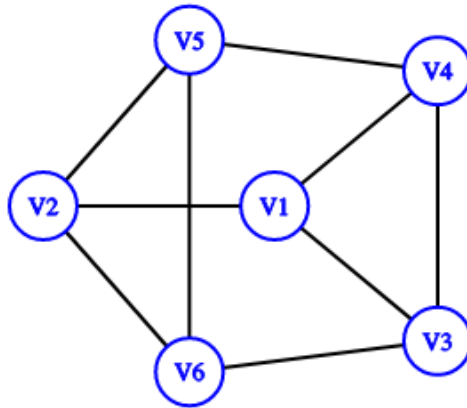


Figura 11. Grafo 3-regular.

Notemos que por ejemplo v_5 es adyacente a v_2 . Es un grafo regular puesto que el grado de cada vértice es 3. Por lo tanto $\delta(G) = \Delta(G) = 3$. Fuente: Elaboración propia.

Definición 6. Un grafo es completo si cualquier par de vértices distintos del grafo son adyacentes. Se denota por K_n al grafo completo de n vértices.

El grafo de la Figura 9, por ejemplo, no es un grafo completo dado que el vértice v_1 y v_6 no son adyacentes (entre otros). Si pensamos en el triángulo clásico (como figura geométrica) se puede entender como un grafo completo de 3 vértices o K_3 .

Definición 7. Un camino en un grafo G es una secuencia de vértices distintos $P = v_1, v_2, \dots, v_k$, donde $(v_i, v_{i+1}) \in E(G), i = 1, \dots, k - 1$.

En otras palabras, para el ejemplo de la Figura 9, $P = v_1, v_3, v_5$ es un camino puesto que (v_1, v_3) y (v_3, v_5) pertenecen a $E(G)$ pero $P = v_2, v_5, v_1$ no es un camino.

Si esta vez consideramos una secuencia de vértices $C = v_1, v_2, \dots, v_k$, no necesariamente distintos donde $(v_i, v_{i+1}) \in E(G), i = 1, \dots, k - 1$ y además $v_1 = v_k$, diremos que C es un circuito. Si por el contrario todos los $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ son distintos y $k \geq 3$, C se llama ciclo.

Definición 8. Un grafo G es conexo si para todo par de vértices distintos v y w de G existe un camino de v a w . Es decir, un grafo es conexo si está “en una sola pieza”.

MODELOS EN EDUCACIÓN

Cuando nos referimos a modelos en educación las interpretaciones pueden ser variadas. Podemos referirnos a modelos desde un sentido político o económico, en el que involucramos actores de índole mucho más gubernamental; modelos educativos en un sentido administrativo, en el que podríamos pensar más desde un plano de directivas de instituciones educativas; o modelos educativos en cuanto a la filosofía de la educación como tal, es decir conceptos o procesos relacionados a la enseñanza, al aprendizaje, la inteligencia, entre otros.

En particular, dos tipos de modelos aparecen con frecuencia en el estudio de modelos educativos: aquellos que se basan en una perspectiva desde el currículo y aquellos que resultan más conceptuales desde una perspectiva filosófica.

Modelos educativos desde una perspectiva filosófica

Si pensamos ahora la educación desde un punto filosófico, conceptos como el de enseñanza, aprendizaje, conocimiento, entre otros, comienzan a florecer. Estos conceptos, estudiados por diferentes filósofos o pedagogos, han dado lugar a variados modelos que intentan describir estas nociones. En particular, Serrano y Pons (2007) realizaron una investigación sobre los diferentes modelos educativos que investigan los procesos de aprendizaje y enseñanza y los categorizaron de la siguiente manera.

1. Modelos desde una perspectiva temporal. Constituidos por aquellos modelos en los que el énfasis está en el análisis de las conductas docentes para con esto entender lo que sucede en el aula. Estos modelos se agrupan nuevamente en dos categorías:
 - a. basados en el paradigma conductista y el concepto de “profesor eficaz” (comillas usadas por Serrano y Pons (2007)) en el cual existe un vínculo directo entre el rendimiento de los alumnos al comportamiento y estilo didáctico del profesor.
 - b. basados en el paradigma cognitivo y en el denominado “pensamiento pedagógico del profesor” que refieren a procesos invisibles o no observables que ocurren en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
2. Modelos transicionales que reposan en la relación asimétrica profesor → alumno como clave de la enseñanza. En estos modelos si bien se analizan las interacciones entre ambos miembros del proceso enseñanza-aprendizaje, el peso está centrado en el profesor y sus categorías son mucho más relevantes.

3. Investigaciones centradas en el paradigma constructivista, que, a diferencia de los modelos anteriores, otorga protagonismo al estudiante en el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Estos modelos se agrupan en:
- a. Propios del constructivismo radical, en el que el alumno es en definitiva el eje central del proceso de aprendizaje, tanto como protagonista como responsable. Los modelos basados en esta premisa consideran al aprendizaje como una reestructuración de los instrumentos cognitivos del individuo como resultado de la interacción estudiante-instrucción.
 - b. Propios del constructivismo cognitivo, estos modelos centran sus esfuerzos en establecer la relación entre una enseñanza eficaz con los procesos psicológicos que llevan a cabo los estudiantes para beneficiarse de ella.
 - c. Propios del constructivismo en sentido amplio, en lo que se trata de dar una mayor a integración a los diferentes aspectos que ocurren en el contexto del aula para explicar los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Estos modelos intentan integrar diferentes puntos de vista provenientes de la lingüística, la sociolingüística, antropología social, entre otros, junto con las ideas de la psicología de la educación.

De lo que se puede recopilar de las investigaciones sobre los modelos que estudian el proceso de enseñanza-aprendizaje es que las concepciones constructivistas presentan a éste como la interacción entre tres elementos: Estudiante, profesor y contenido. Esta relación entre estos tres actores ha sido estudiada ampliamente y uno de los modelos mayormente citados es el conocido triángulo pedagógico ampliamente divulgado por Jean Houssaye (1988). En este triángulo, los vértices representan al profesor, al alumno y al saber y los lados, las interacciones o relaciones que se establecen entre estos tres. Por la importancia de este modelo para el desarrollo de este

trabajo dejaremos para un capítulo más adelante un análisis más detallado del triángulo pedagógico.

MODELOS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

El desarrollo y los avances de la matemática y la física en la década de los cincuenta, puso en evidencia a las Universidades y centros de estudios que la educación matemática necesitaba un cambio, una actualización. Algunas universidades en Estados Unidos empezaron a modificar sus planes de estudio de modo tal que impulsaran o enseñaran la matemática necesaria para la época. A partir de ese momento surgen nuevos programas en la enseñanza científica, algo que se conocería como “matemática moderna”. Estos nuevos cambios en los currículos se enfocaban en el contenido científico más que en la metodología o en la forma de enseñar. Las clases de matemática se habían convertido en un monólogo magistral de parte de un científico de renombre seguido de ejercitación continua. Los alumnos estaban entonces limitados a procesos de memorización y repetición sin tener lugar a la indagación, interpretación o asimilación de los conceptos que estaban “aprendiendo”.

La Teoría de las situaciones didácticas

En la década de los 70, Guy Brousseau hace las primeras formulaciones sobre la “teoría de las situaciones didácticas”. En ésta, establece la importancia para la didáctica de utilizar un modelo propio de la actividad matemática. Al respecto, Contreras (2012) explica: “[...] así pues, el objetivo fundamental de la didáctica es el de definir un “conocimiento matemático”, mediante una “situación” tal que esta situación produzca “situaciones a-didácticas” en los alumnos que permitan engendrar una buena representación del conocimiento.”

Para esta teoría, una situación es *didáctica* cuando un individuo (en este caso el profesor) quiere enseñar a otro individuo (estudiante) cierto contenido matemático. Por el contrario, una situación es *a-didáctica* cuando se genera una interacción entre un individuo y un medio para resolver un problema; como el medio no tiene la intención de enseñar directamente al individuo se dice que no hay intención didáctica.

Para Brousseau entonces, una buena situación didáctica es aquella en la cual se genera una buena situación a-didáctica con la que los alumnos pueden utilizar su conocimiento y experiencia y de esta manera asumir la responsabilidad de su propio aprendizaje. La siguiente figura nos esquematiza el modelo planteado por Brousseau.

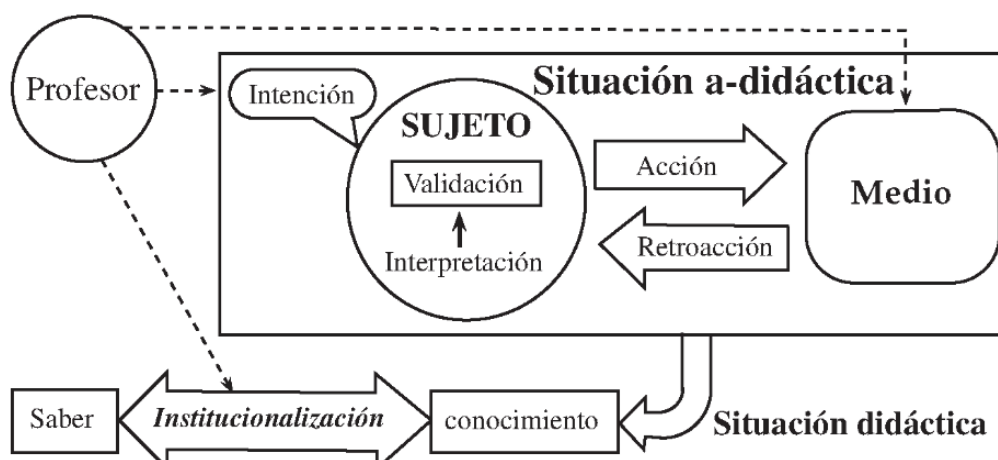


Figura 12. Interacción con situaciones a-didácticas.

Fuente: Parraguez, M., Rojas, J., Vásquez, P (s.f).

El modelo planteado por Brousseau abre la visión sobre lo que se esperaba o se entendía como didáctica de la matemática, puesto que no se limita al interior del estudio de la estructura del conocimiento matemático, sino que estudia también al sujeto que está aprendiendo al interior

de su propia actividad. Este concepto, conocido como “epistemología del aprendizaje de la matemática” es uno de los objetivos fundamentales de la didáctica de la matemática.

El modelo anterior, representado en la Figura 12, analizado como figura abstracta, es un modelo en el cual el orden y la posición de los elementos es primordial. Si observamos al “elemento profesor”, por ejemplo, podemos notar como las direcciones hacia la institucionalización, intención o medio van en una sola dirección. Pareciese, de hecho, al analizar el modelo, que la retroalimentación del sujeto hacia el profesor no fuese posible, el sujeto aparece inmerso dentro de la situación a-didáctica.

Teoría de la transposición didáctica

Para Chevallard (1991), el concepto de transposición didáctica se centra en la transferencia del saber sabio (el de los matemáticos, profesores o expertos) al saber enseñado (el del observador o estudiante) y por lo tanto a la diferencia que pudiera (o no) ocurrir entre ellos.

El mismo Chevallard (1991) define *“Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza es denominado la transposición didáctica”*.

La primera etapa de la instancia de la transposición didáctica se lleva a cabo en el currículo pues de un modo u otro se deben hacer las adaptaciones de los conceptos matemáticos abstractos a aquellos que realmente se necesitan o quieren enseñar. La segunda etapa de la transposición didáctica ocurre cuando los profesores transforman el contenido que se ha designado en el currículo en un saber a enseñar; este saber por supuesto, puede tener transformaciones o

modificaciones durante esta etapa que van de la mano del profesor y de cómo presenta estos saberes.

Usualmente se representa a la transposición didáctica por el siguiente esquema:



En el que se pretende mostrar el paso de lo implícito a lo explícito.

Teoría de los Campos Conceptuales

Vergnaud (1990) plantea el estudio de la enseñanza y aprendizaje de los campos conceptuales. Estos campos hacen referencia a grandes grupos de situaciones o conceptos que requieren herramientas, procedimientos o representaciones simbólicas que están conectadas entre sí, para su entendimiento. Por ejemplo, tenemos estructuras aditivas, multiplicativas, relaciones número-espacio y del álgebra. El dominio de dichos campos por parte de algún sujeto requiere de mucho tiempo. Nuevos problemas y propiedades deben ser estudiadas durante años para que los estudiantes puedan apropiarse y dominar los elementos fundamentales de específicos campos conceptuales.

En particular, en matemática, los conceptos adquieren significados cuando se agrupan en diferentes definiciones, teoremas, resultados; cada situación no puede ser estudiada como un ente aislado sino se necesitan varios de ellos. Es por esta razón que Vergnaud decide estudiar la enseñanza y aprendizaje de campos conceptuales. Explica además que, a lo largo del proceso de aprendizaje de un alumno, se le es presentado un concepto varias veces posiblemente de variadas

maneras, en un principio como esquemas elementales y con el tiempo se van agregando más representaciones o símbolos que terminan por generar un concepto significativo.

MODELO CIENTIFICO Y MODELO CONCEPTUAL

Modelo Conceptual

Un modelo conceptual puede ser definido como un tipo de modelo que provee una representación abstracta y simplificada de un sistema, resaltando las principales características y relaciones que existen entre sus componentes (Sugumaran & Degroote, 2011). Este tipo de modelo se enfoca en la estructura conceptual de la realidad que se está estudiando, en lugar de los detalles específicos de la implementación o realización. La elaboración de un modelo conceptual se realiza a través de una serie de decisiones que definen cómo se conceptualiza el sistema de interés. Estos modelos son comúnmente utilizados en una variedad de disciplinas, desde ciencias de la computación hasta negocios, salud y ciencias sociales.

A diferencia de los modelos matemáticos o físicos que describen con precisión cómo un sistema opera a nivel numérico o físico, los modelos conceptuales se preocupan más por el "por qué" y el "qué". No proporcionan una descripción detallada de cómo funciona el sistema, sino que resumen la estructura y la lógica detrás del sistema, sus componentes y sus interacciones (Eppler & Aeschimann, 2009).

Diferencias entre el Modelo Conceptual y el Modelo Científico

Por otro lado, un modelo científico es un tipo de modelo que busca describir y explicar fenómenos físicos, químicos, biológicos, o de cualquier otra naturaleza científica, basándose en

teorías científicas (Suppe, 2000). Estos modelos son generalmente más concretos y se basan en observaciones empíricas, experimentos y datos. Buscan proporcionar explicaciones precisas y detalladas de cómo funciona un sistema, permitiendo predicciones verificables y falsables. Los modelos científicos también son ajustables en respuesta a nuevas evidencias, lo que permite una mejora y refinamiento continuos en la comprensión del sistema en cuestión.

Aunque ambos tipos de modelos buscan proporcionar una comprensión de un sistema o fenómeno, se diferencian en varios aspectos clave. Los modelos conceptuales tienden a ser más abstractos y menos precisos, ya que se enfocan en la captura de las ideas y relaciones clave que definen el sistema. Por otro lado, los modelos científicos son más detallados y precisos, y están basados en evidencias empíricas y observaciones detalladas. Por lo tanto, los modelos conceptuales son más utilizados en las etapas iniciales de la comprensión de un sistema, mientras que los modelos científicos se utilizan una vez que se ha acumulado suficiente evidencia y conocimiento detallado sobre el sistema (Godfrey-Smith, 2006).

CAPÍTULO 2. SOBRE EL TRIÁNGULO DIDÁCTICO (TRD)

EL TRIÁNGULO DIDÁCTICO

Pese a que la relación estudiante - saber - profesor ha sido ampliamente estudiada por muchos expertos en didáctica y educación, posiblemente el esquema realizado por el filósofo Jean Houssaye (1988) sea el más extendido y del que más referencias teóricas se puedan encontrar. El esquema, conocido como *triángulo pedagógico* o *triángulo didáctico* es una representación gráfica de las relaciones entre el saber, el profesor y el alumno (los vértices), al igual que las relaciones que se establecen entre ellos (los lados).

Como en la mayoría de los modelos que representan toda situación pedagógica, se pretende mostrar cómo el saber poseído por un profesor se convierte en un saber adquirido por el alumno. Houssaye denomina *enseñanza* a la relación profesor - saber; *aprendizaje* a la relación alumno - saber; y *formación* a la relación profesor - alumno. El esquema del triángulo didáctico tiene por lo tanto la siguiente forma:



Figura 13. Triángulo didáctico.

Fuente: Elaboración propia

Como explica Galazzi (2015) sobre la formulación de Houssaye, el modelo del triángulo nace como una forma de organizar y sistematizar datos que se tenían sobre observaciones y estudios sobre experiencias educativas en la enseñanza de la filosofía, dotando a estos datos de una estructura teórica. Por lo tanto, la génesis del triángulo es la necesidad de ordenar de manera teórica conceptos que en la práctica parecían ser desordenados. Luego de un tiempo propone al triángulo como una formalización que permite entender el funcionamiento de la institución educativa.

ANTECEDENTES HISTÓRICOS

La teoría de los modelos pedagógicos

Bertrand (1980) explica que para analizar los fenómenos educativos es necesario comprender diferentes niveles de análisis en los que se encuentran diferentes modelos. Existen tres niveles de análisis, el primero en el que se encuentran los modelos pedagógicos, el segundo en el que están los modelos educativos y el último en el que se encuentran los modelos paradigmáticos.

Los modelos pedagógicos son aquellos utilizados por los profesores cotidianamente en el aula de clase, los cuales han sido ampliamente divulgados y de los cuales se pueden encontrar muchos ejemplos. Estos modelos hacen referencia principalmente a principios metodológicos y establecen de cierta manera como organizar la enseñanza y el aprendizaje. Son modelos que muestran un conjunto de experiencias de profesores sobre su quehacer cotidiano, sobre su pedagogía, en los que identifican las características principales para que estas puedan ser replicadas por otros profesores.

Respecto a los modelos educativos, Bertrand (1980) señala que parece haber un “triángulo de oro” en el que se encuentran los individuos, la escuela y la sociedad y que a su vez dicho triángulo revela tres grandes modelos educativos:

- a. centrados en la escuela, que son modelos cuyo objetivo principal es crear *pedagogías* para mejorar la enseñanza y el aprendizaje. Conocido también como modelo sistemático u objetivo.
- b. centrados en el individuo, que son modelos que corresponden a *pedagogías* enfocadas a la gestión de la educación. Llamadas también pedagogías humanistas o subjetivas.
- c. centrados en la sociedad, que son aquellos destinados a analizar, modificar o acentuar los vínculos entre la escuela y la sociedad. Se conocen como pedagogías sociocéntricas.

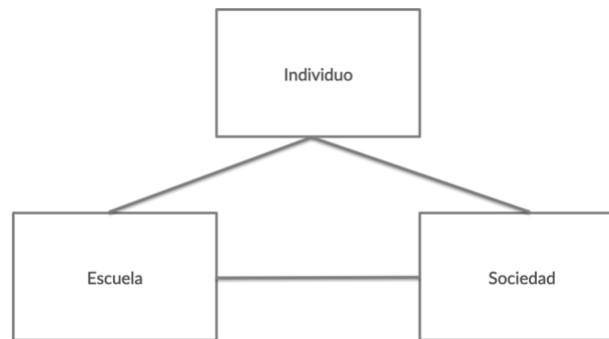


Figura 14. Triángulo de Oro. (*Triangle d'or*).
Fuente: Bertrand (1980)

Por último, tenemos los modelos paradigmáticos que son construidos con un grado mayor de abstracción y de generalidad dentro de los que se sitúan modelos organizacionales y globalistas. Como explica Galazzi (2015), estos modelos recogen información sobre las prácticas ya

establecidas en el sistema educativo, pero proponen con un fuerte carácter especulativo nuevos modelos de estructuración y acción. Es precisamente dentro de este tipo de modelos en el que podemos encontrar el TRD haciendo énfasis en el carácter *descriptivo* y *prescriptivo* de las prácticas educativas.

EL PLANTEAMIENTO DE HOUSSAYE

Jean Houssaye es un profesor de ciencias de la educación en la Universidad de Rouen con larga experiencia en el estudio de las estructuras escolares. Su trabajo principal está enfocado en el estado de la pedagogía, en el vínculo que existe entre la teoría y la práctica de la educación. Su trabajo sobre el *triángulo pedagógico* o *triángulo didáctico* ha sido probablemente su trabajo más renombrado y viceversa, es decir, pese a que varios autores han hablado sobre la triada estudiante - saber - profesor, es indiscutible que el de Houssaye sea el más citado.

Houssaye define cualquier acto pedagógico como el encuentro entre tres vértices de un triángulo: el estudiante, el saber y el profesor. El profesor es quien domina cierto saber (y por lo tanto tiene ciertos “pasos por delante” del estudiante) y se encarga de transmitirlos. El estudiante es quién adquiere el conocimiento a través de determinadas situaciones pedagógicas.

Los lados del triángulo representan las relaciones necesarias para el acto pedagógico. Por un lado, tenemos la relación didáctica entre profesor y saber que es la que permite *enseñar*. La relación entre profesor y estudiante es la que permite el proceso de *formación* y la relación existente entre estudiante y saber es la que permite el *aprendizaje*.

Específicamente, Houssaye (1988) define los elementos del triángulo didáctico de la siguiente manera.

Profesor: Este es el individuo o entidad que facilita el proceso de aprendizaje. El papel del profesor no es solo transmitir información, sino también ayudar a los estudiantes a construir su propio conocimiento. Además, el profesor también tiene el papel de guiar, motivar y apoyar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje.

Estudiante: Este es el individuo o entidad que está en el proceso de aprendizaje. El estudiante es un actor activo en el aprendizaje, no simplemente un receptor pasivo de información. El estudiante interactúa con el saber y con el docente, y a través de estas interacciones, construye su propio conocimiento.

Saber: Este representa el contenido o materia de aprendizaje. En este modelo, el saber no es simplemente un objeto estático que se transmite del docente al estudiante, sino un componente activo en el proceso de aprendizaje que se construye y reconstruye a través de las interacciones entre el docente y el estudiante.

Los lados del triángulo representan las relaciones entre estos tres actores:

Formación. Profesor - Estudiante: Esta arista representa la interacción directa entre el profesor y el estudiante. Esto incluye la comunicación, el intercambio de ideas, la guía, el apoyo, la motivación y la evaluación.

Enseñanza. Profesor - Saber: Esta arista representa la relación entre el profesor y el saber. Esto implica la preparación del profesor, la selección y adaptación de los materiales de enseñanza, y el desarrollo y aplicación de estrategias de enseñanza.

Aprendizaje. Estudiante - Saber: Esta arista representa la relación entre el estudiante y el saber. Esto incluye la interacción del estudiante con el contenido de aprendizaje, la construcción del conocimiento, y la aplicación y evaluación de ese conocimiento.

Houssaye, describe también como en cualquier situación pedagógica se privilegia solamente a dos de los tres elementos del triángulo, dejando a un tercero excluido (“tercero muerto” (Houssaye, 1988, págs. 42-43)). Pensemos por ejemplo en la enseñanza tradicional, en ésta, el énfasis está puesto en el saber y los profesores dejando aislados a los alumnos, es decir, la clásica clase magistral.

El “muerto” es, en cambio, aquel elemento que no es reconocido. Un elemento que, aun formando parte intrínseca de la estructura triangular, queda fuera de juego y por ello no se constituye en sujeto del vínculo. Sin embargo, afirma el autor, este “muerto” es también un “loco”, ya que quedando afuera del reconocimiento deseante sigue larvadamente en tanto mirada y apareciendo involuntariamente en el discurso, en los actos fallidos, como emergente de lo que no es reconocido, de lo fantasmático. El juego triangular implica, entonces, que uno de los tres términos permanezca silenciado, adormecido, no reconocido como sujeto – podríamos decir, como parte, como elemento– de la situación. El juego es dinámico, ya que las apariciones intempestivas del muerto siempre logran, en algún momento, romper el juego de reconocimiento entre sujetos y modificar los roles de la relación. (Galazzi, 2015, pág. 5)

Enseñar

El profesor es considerado como un experto, una persona que es dueña de un saber y que lo transmite de forma didáctica. En este proceso el papel del profesor es fundamental al momento de generar el contenido necesario para enseñar: preparar material didáctico, sintetizar conceptos claves, preparar la clase, entre otros, por lo que la actividad que domina este lado sería la de

transposición didáctica. El alumno, al estar excluido, va a ser un receptor que recoge todos los contenidos y saberes que el profesor propone.

Formación

Entendemos acá al profesor como un facilitador o mediador con los estudiantes para que estos intercambien problemas, casos, textos, entre otros. Es a partir de esta relación que los estudiantes descubrirán y organizarán el conocimiento; el profesor por su parte será el encargado de ayudar a desplazar los viejos conocimientos de los alumnos y a estructurar el nuevo. Al estar excluido el saber, el profesor hará hincapié en el intercambio y discurso con los estudiantes para generar conocimiento más que en centrar la clase en la exposición de contenidos. El proceso de formación puede ser analizado bajo la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau y también desde la ingeniería didáctica de Régine Douady y Michéle Artigue.

Aprendizaje

En este proceso el profesor queda excluido, por lo tanto, el lado asociado es el de estudiante-saber. En este caso el estudiante aprende “por sí mismo” al experimentar, indagar, debatir e interactuar con materiales o contenidos a su disposición generados con anterioridad por el profesor. Es entonces el profesor quien guía el proceso y también quien proporciona la metodología, pero es el alumno el que actúa de manera activa en el proceso de aprendizaje. Si en el triángulo se hace énfasis en este lado se produce la denominada teoría de los campos conceptuales.



Figura 15. Relación entre el triángulo didáctico y las teorías de la didáctica de la matemática.
Fuente: Contreras (2012)

Galazzi (2015) luego de analizar diferentes posturas, relata como Bertrand observa que el modelo establecido por Houssaye aborda tres posturas teóricas diferentes: el modelo como *estructura*, en tanto que el triángulo permite teorizar y desarrollar una mirada abstracta de la complejidad educativa. El modelo permite mostrar los elementos fundamentales de la situación educativa y las relaciones que existen entre ellos. El modelo como *regulación dinámica* permite pensar las diferentes formas de interrelación entre los elementos y la posibilidad de observar el cambio, en particular cuando se tiene en cuenta la noción del tercero excluido que permitiría analizar las diferentes formas del modelo. Por último, el modelo como una *narración* porque se sitúa al nivel de las creencias acerca de la vida institucional y este se va transformando a medida que surgen nuevas investigaciones que abordan el tema.

CRÍTICAS AL MODELO

El modelo del TRD ha sido foco de muchas investigaciones en las que se han efectuado o bien modificaciones o bien algunas críticas. Por ejemplo, Ibáñez (2007) usando como fundamento algunos postulados de la psicología interconductual desarrolla un análisis del TRD y muestra como este modelo sufre de algunas dificultades teóricas y errores lógicos que reducen su capacidad descriptiva y analítica de los procesos educativos.

La psicología interconductual tiene como objeto de estudio la conducta de los organismos dejando de lado procesos extraespaciales e inobservables que caracterizan más a las formulaciones mentalistas. Para este enfoque, los datos de la psicología están constituidos por interacciones de cada individuo con otros individuos o con objetos que constituyen campos limitados bien definidos y que ocurren además en contextos particulares; estas interacciones generan a su vez nuevas historias que se irán convirtiendo en parte esencial de futuras interacciones.

La primera crítica que explica Ibáñez (2007) está referida a la naturaleza que se le da al vértice *saber* (conocimiento o contenido). Según este autor, al considerarse al saber cómo parte de uno de los vértices del triángulo con el cual los estudiantes o los profesores pueden interactuar, se le otorga al saber una naturaleza física, tangible, concreta y sustancial; que justifica entonces la terminología de “adquirir/transmitir/construir un conocimiento” pero que, si se hace un análisis sobre el concepto de conocimiento, se tiene que en realidad no es una cosa. Como dice Ibáñez (2007, pág. 440), “*El conocimiento –admítase– no tiene masa ni volumen, ni ocupa un lugar en el espacio; no se le puede ver, oír, oler o tocar; tampoco comprar, guardar o intercambiar; es insustancial.*”

Ibáñez continúa explicando que, al no constituir una entidad material, el conocimiento no se puede concebir como un factor del que pueda depender alguna acción sobre otros actores del proceso educativo. La idea de que el conocimiento se “transmita”, “adquiera” o se “construya” [comillas usadas por el autor] representarían entonces un error lógico, lo correcto sería entonces ir a los orígenes de lo que se interpreta como conocimiento, para lo cual Ibáñez, citando a Villoro escribe en su artículo “[...] el conocimiento es un estado disposicional a actuar, adquirido, determinado por un objeto o situación objetiva aprehendidos, que se acompaña de una garantía segura de acierto”.

La segunda crítica que realiza Ibáñez es la de entender *el aprendizaje como adquisición de conocimiento*, y explica que sumado a la concepción del saber cómo una “cosa” se tiene entonces al aprendizaje como una adquisición que tiene el alumno del conocimiento, pero dado que se estableció que concebir al conocimiento como un objeto material era un error, entonces la transferencia de éste también lleva consigo un error lógico. El aprendizaje no debería ser algo que se gana y se guarda para ser usado más adelante explica Ibáñez, sino que debería ser más una disposición a actuar de manera novedosa o creativa frente a objetos o situaciones concretas y donde ese actuar cumpla con ciertos criterios de acierto.

Por último, Ibáñez (2007) hace una crítica respecto del *profesor como mediador de conocimiento* dado que éste aparece siempre como una figura que es mediador o transmisor del conocimiento que luego es adquirido por los estudiantes de acuerdo con sus intereses. Esta visión nuevamente lleva consigo la idea de que el conocimiento es una “cosa” aislada del profesor y del estudiante. Las dos críticas anteriores del conocimiento como objeto material y del aprendizaje como adquisición de conocimiento ponen en tela de juicio la pertinencia de entender al profesor como un intermediario entre conocimiento y estudiante. Por una parte, explica que el profesor no

puede considerarse como un objeto independiente del conocimiento puesto que este último es realmente un actuar ante situaciones determinadas, y ese actuar necesita naturalmente de un actor que lo realice. El profesor, es una persona entonces que sabe cómo actuar ante determinadas situaciones y su papel es justamente el de transmitir ese actuar a los estudiantes para que estos lo repliquen bajo objetos o situaciones concretas de la misma manera como él lo haría. Por otra parte, Ibáñez hace hincapié en la importancia del *discurso didáctico* sobre el profesor. Dado que es realmente el discurso didáctico el que entra en juego durante el proceso educativo, pero es el profesor el encargado de crearlo.

Otra de las críticas realizadas al modelo del triángulo pedagógico lo podemos encontrar en Galazzi (2015). En este artículo, la autora hace una distinción entre tres grupos diferentes de críticas al modelo desde una perspectiva filosófica.

La primera crítica es acerca de los *presupuestos ontológicos*. El primero de estos presupuestos es de tipo ontológico-epistemológico y se refiere a la simplificación a un número fijo de elementos que se hace de la realidad, argumentando que esa simplificación muestra los aspectos más relevantes del proceso educativo. Lo que ocurre entonces es que se lleva una totalidad a una unidad sin considerar los elementos que quedan por fuera del modelo. En el modelo de Houssaye pese a que se hace una consideración de que los tres elementos: profesor - conocimiento - estudiante y las tres relaciones entre estos son las más relevantes (entre otras) del proceso educativo, nunca se hace referencia a esos otros elementos que quedaron por fuera del triángulo y por lo tanto se da por representada la situación pedagógica por medio de ese modelo.

El segundo de los presupuestos ontológicos implica a los términos usados en la triangulación. Estos términos hacen que los elementos del modelo se tiendan a individualizar y a comprender cada uno como una totalidad cerrada, lo que hace difícil estudiarlos como sujetos identificables y

completos. Este presupuesto, explica Galazzi, se acentúa cuando se identifican los componentes del plano real como “personas” (lo estudiantes o profesores) y se pone en cuestión con el elemento “saber”.

En efecto, respecto del saber es dable observar que no hay un saber, sino saberes múltiples, en general, además, en disputa respecto de la relevancia social que poseen y la pertinencia de su inclusión/exclusión del currículum. Sin embargo, también produce fuertes problemas considerar que hay un sujeto identificable, maestro o alumno, cada uno de ellos disociado del saber o saberes específicos, ya que implica borrar la consideración altamente relevante de que en el aula hay, al menos, múltiples formas de ser maestros o alumnos (sin considerar el problema del género, es decir, si hubiera maestras y alumnas, si los géneros son solo dos, etc.) y al menos dos universos de saberes que en general se hallan en disputa entre sí y que forman parte del universo de lenguaje y presupuestos de cada uno de estos dos roles o figuras implicadas. (Galazzi, 2015, pág. 12)

Esta problemática de la cuestión referida a los sujetos involucrados en la educación y su concepción es discutida por diferentes autores desde diferentes puntos de vista. Galazzi justamente nombra los trabajos de Bourdieu y Passeron (que estudian la problemática desde un punto de vista sociológico), B. Bernstein (que lo aborda desde la lingüística) y los estudios de Willis (desde un punto de vista antropológico)

La segunda crítica que realiza Galazzi es acerca de los *presupuestos valorativos*. Estos presupuestos son aquellos que ponen en preferencia el modelo de estructura triádica porque de alguna manera se consideran a estos mucho más “orgánicos, dinámicos y complejos”. Estas estructuras ponen en evidencia dos consecuencias problemáticas; la primera que pone en evidencia al “tercero muerto”. La lógica dialéctica implica que en cada uno de los lados del vértice se relacionen dos de los actores del proceso educativo dejando uno de lado, transformando entonces el vínculo triádico en nada más que una relación momentánea de dos (aunque se haga la aclaración que realmente el hecho de centrar la atención en los diferentes

elementos hace que se creen tres triángulos diferentes que ofrecen tres diferentes perspectivas del problema).

La segunda consecuencia es que el tipo de modelo triangulado conlleva a la formación de una estructura evolutiva. La autora explica que, pese a que la relación entre dos elementos del triángulo sea jerárquica, la resolución dialéctica entre ellos da lugar a nuevas configuraciones triangulares que presentan una evolución respecto de la anterior. Esta idea de evolución o cambio es vital en el estudio de los fenómenos educativos, pero de alguna manera el modelo del triángulo educativo lo presenta de una “manera clásica”. En términos matemáticos podríamos hablar de que no existe una continuidad en la evolución que presenta el modelo del triángulo, o más que continua, no representa una “curva suave de cambio”; lo que nos ofrece es más una fotografía de diferentes configuraciones que van evolucionando. Como dice Galazzi (2015, pág. 15) “Cada descripción de las configuraciones triangulares se convierte en un congelamiento momentáneo de la situación educativa que capta los elementos salientes y relevantes para pensarla, una búsqueda de las esencias”

Por último, Galazzi hace una crítica acerca de los *presupuestos políticos*; explica, que el hecho de que en el triángulo las figuras de profesor y estudiante aparezcan distanciadas como elementos diferentes dejan de lado (o al menos invisibilizan) la posibilidad de auto-enseñanza o autoaprendizaje, además de que acentúan la brecha entre “alguien que sabe” y “alguien que no sabe” y que esta situación evidencia la problemática política. Por un lado, la política, porque se tratan aspectos como “igualdad”, pero para esto se presupone un acuerdo entre las partes involucradas.

En efecto, la política aparece sólo allí donde lo que hay es la imposibilidad de establecer una distribución de las partes basada en la naturaleza o un orden de las cosas que trasciende las decisiones humanas, el acto político consiste justamente

en mostrar que el orden y la jerarquía de las cosas que parece natural, no lo es en realidad, y por ello la política aparece, para Rancière, en los momentos de interrupción del orden y de desacuerdo respecto de los principios que fundan la diferencia en determinada situación. (Galazzi, 2015, pág. 6)

Por otro lado, Galazzi habla de “la policía”, que en el triángulo funciona como un actor que define las partes y además determina de manera rígida quién posee o quien no ciertas cualidades en el proceso educativo. Funciona entonces como un principio de legitimación de la desigualdad. La autora explica como muchas sociedades actuales siguiendo la herencia de la escuela moderna, establecen un trayecto educativo a lo largo de la vida de una persona. Durante este trayecto se genera una jerarquía basada en dos principios: la edad y la posesión de saberes. Sin embargo, este orden es provisorio y llega a un momento de estabilización en el cual las partes que resultan desfavorecidas se revelan y revocan este orden. Por último, Galazzi, haciendo referencia a Rancière, motiva sobre las diferentes configuraciones que se podrían tener sobre las situaciones educativas, argumentando que “[...] *la asimetría entre el que enseña y el que aprende no resulta una cualidad intrínseca y necesaria para todo proceso de aprendizaje y que la configuración de lo sensible que propone la ontología del triángulo pedagógico no resulta la única posible, ni la esencial para pensar las situaciones educativas.*” (Galazzi, 2015, pág. 18)

MODELOS ALTERNATIVOS

Diferentes formulaciones han sido realizadas a partir del modelo del TRD; éstas están basadas principalmente en un posterior análisis de algunas de las críticas relatadas en la parte anterior. En particular nos centraremos en dos modelos alternativos, el primero propuesto por Ibáñez Bernal y el segundo por Gvirtz y Palamidessi.

Modelos de las interacciones didácticas de Ibáñez Bernal (2007)

En el 2001, Ibáñez Bernal y Ribes propusieron el modelo de procesos educativos, fue a partir de este modelo que el primero de ellos se basó para formular el modelo de las interacciones didácticas. Este modelo, se realiza a partir de la intención de rectificar los errores lógicos que el mismo autor encuentra (y que se describieron en el apartado anterior) del TRD.

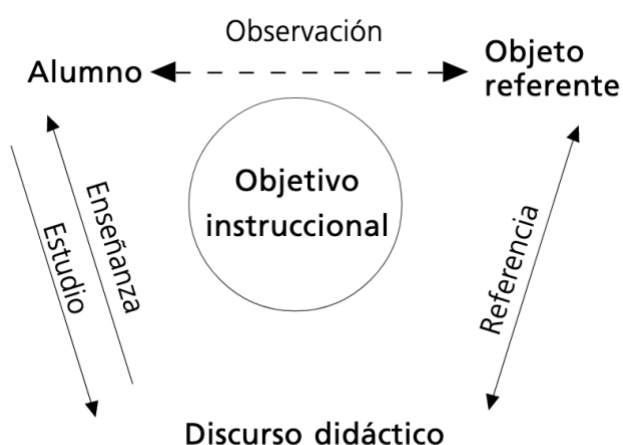


Figura 16. Esquema del modelo de interacciones didácticas.

Fuente: Ibáñez (2007)

Según Ibáñez (2007), las *interacciones didácticas* son las relaciones que se establecen entre actores y factores de los procesos educativos durante un *episodio instruccional*. Este episodio instruccional está definido como un espacio-tiempo determinados que están organizados para proveer y generar condiciones adecuadas para el aprendizaje del estudiante.

El *objetivo instruccional* es el objetivo educativo particular que se intenta alcanzar en un episodio instruccional específico, por lo tanto, es un elemento del currículum. Este objetivo describe (en términos del desempeño esperado ante una situación problemática) la competencia

que un estudiante deberá desarrollar como producto de las interacciones didácticas en determinados episodios instruccionales. El *alumno* es el individuo que debe desarrollar las competencias propuestas y descritas en el objetivo instruccional a partir de su interacción con el objeto y con el discurso didáctico. Ibáñez (2007) citando a Ryle, define a el *discurso didáctico* como la herramienta lingüística que se organiza y realiza con la intención de instruir a alguien, para que sea recordado, imitado y ensayado por quien lo recibe. El discurso didáctico viene a ser para este modelo lo que el profesor es para el modelo del TRD, pero en este caso también podría ser cualquier otro emisor de ese discurso didáctico en diferentes tipos de modalidad lingüística: oral, textual, gráfica, etc. El discurso didáctico se convierte por lo tal en uno de los principales factores del modelo puesto que constituye una mezcla entre el conocimiento del profesor (es decir el desempeño efectivo ante ciertos objetivos instruccionales) y las competencias lingüísticas de este que le permitan lograr una efectiva interacción didáctica.

La *enseñanza* es una de las relaciones que se establecen entre el alumno y el discurso didáctico en determinado episodio instruccional y consiste según Ibáñez en la acción de referir al estudiante los criterios morfológicos y funcionales que debe cumplir su desempeño ante determinadas situaciones problema de acuerdo con ciertos criterios que establece la comunidad epistémica a la que se quiere pertenecer. En esta misma línea de relaciones encontramos al *estudio* que según explica el autor se entiende como el contacto funcional del alumno con el discurso didáctico. Este proceso exige al estudiante el ser capaz de responder y entender las formas como el discurso didáctico está siendo elaborado, aunque también es posible que no sea suficiente para lograr un completo aprendizaje, es por ello por lo que Ibáñez aclara que el modelo de las interacciones didácticas establece la necesidad de que concurren otros factores y procesos para lograr el aprendizaje de determinada competencia.

El *objeto referente* corresponde de alguna manera con la materialización de aspectos del discurso didáctico. Corresponde con los objetos, las situaciones o los eventos del mundo real (a lo cual el autor le da gran importancia) antes los cuales el estudiante debe enfrentarse dependiendo de ciertos criterios preestablecidos. La importancia ceñida a la realidad del objeto referente viene de la mano con el proceso de *observación* que se da justamente cuando el alumno interactúa o hace contacto empírico con el objeto referente. Este proceso de observación pone de presupuesto que el alumno perciba, actúe o infiera ante el objeto referente las cosas que prescribe del discurso didáctico.

Por último, la relación de *referencia* es la que define a la interacción entre el discurso didáctico y el objeto referente. La referencia en este caso hace pensar en la naturaleza lingüística del discurso didáctico. Como explica Ibáñez (2007) “[...] en un determinado episodio instruccional, el discurso puede hacer referencia al objeto estando este presente –referencia directa– o estando el objeto ausente –referencia indirecta–. Además, el discurso didáctico puede preceder, suceder u ocurrir en forma simultánea a la presencia del objeto referente, lo que es probable que derive en diferentes resultados de efectividad en el aprendizaje” (p. 453).

Gvirtz y Palamidessi (2008). La enseñanza y el aprendizaje como sistema de comunicación

Gvirtz y Palamidessi argumentan que durante el proceso de enseñanza intervienen cuatro diferentes factores. Los autores argumentan que en una institución educativa conviven aprendices (quienes tienen cierto nivel de desarrollo) que necesitan la asistencia de otra persona (enseñante) que es culturalmente más experta que ellos para resolver problemas que solamente podrían abordar gracias a esa ayuda. Este proceso de colaboración y de resolución de problemas entre los diferentes actores, implica un proceso de comunicación interactiva entre aprendices y

enseñantes, pero la educación no es sólo esto; se deben sumar además otros dos elementos: los problemas y el conocimiento de cómo tratarlos en determinada sociedad o cultura.

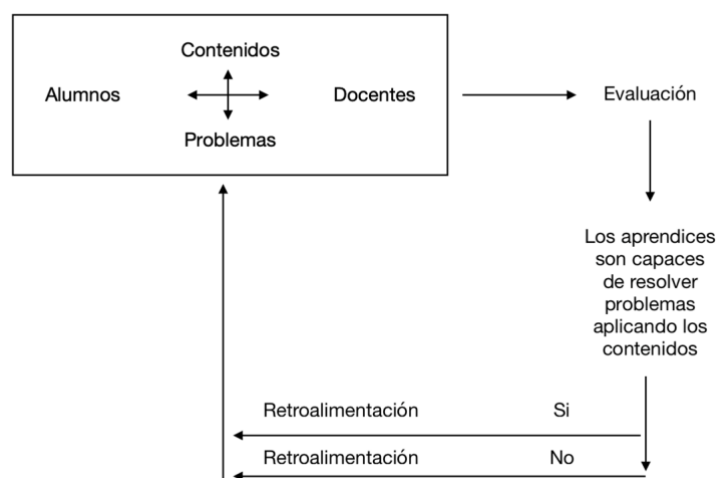


Figura 17. La enseñanza y el aprendizaje como sistema de comunicación.

Fuente: Gvirtz y Palamidessi. (2008)

Para Gvirtz y Palamidessi, el proceso de enseñanza - aprendizaje no se puede representar por medio de la triada docente - estudiante - saber, sino que se debe suponer la interacción entre un aprendiz, un enseñante, un contenido cultural y ciertos problemas en contextos determinados. Estos factores existen en momentos determinados, pero se van transformando o convirtiendo en unos nuevos a medida que el aprendiz va resolviendo los problemas; decimos que están resueltos cuando el aprendiz logra establecer relaciones significativas entre el contenido dado por el enseñante y los problemas, y avanza en la comprensión cuando logra llevar estos aprendizajes a nuevas situaciones que no habían sido planteadas originalmente.

Dentro de otras cuestiones a considerar los autores escriben que:

- a. No existe UN problema, sino que este depende totalmente de la perspectiva: lo que para un docente puede ser un problema significativo que considerar para los alumnos puede no serlo por no llegar a comprenderlo y viceversa.
- b. El contenido elegido y propuesto por el docente podría no ser el que los estudiantes requieran o utilicen para resolver un problema. Con lo cual uno de los aspectos primordiales a tener en consideración por el docente es el de la elección adecuada de contenidos que ayuden a los estudiantes a resolver problemas determinados.
- c. El progreso de la enseñanza y del aprendizaje dependen en cierta medida de un sistema de control ejercido en una clase por medio del profesor. Éste organiza el trabajo entre los alumnos y realiza evaluaciones para comprobar el avance de los aprendices.

INVESTIGACIONES RELACIONADAS Y ANTECEDENTES

La creación de un modelo conceptual ampliado que incorpore la tecnología en el triángulo didáctico de Houssaye se apoya en una serie de investigaciones relevantes. Estas investigaciones abarcan tanto la aplicación de la teoría de grafos en contextos didácticos como el intento de expandir el concepto del triángulo didáctico para considerar la influencia de la tecnología.

Un estudio destacado realizado por Dietrich y Schmidt (2019) aplicó la teoría de grafos para analizar las interacciones entre los estudiantes dentro de un aula. La investigación arrojó luz sobre la dinámica de la clase y ayudó a identificar patrones de interacción útiles para los educadores. Siguiendo una línea de investigación similar, Monod-Ansaldi, Dietrich y Rinaudo (2020) exploraron la centralidad de los profesores en la interacción en el aula a través de la teoría

de grafos, proporcionando una visión tanto cuantitativa como cualitativa de las interacciones profesor-alumno.

Jankvist y Misfeldt (2019) utilizaron la teoría de grafos para descomponer y analizar relaciones matemáticas complejas, lo que reforzó la utilidad de la teoría de grafos como una poderosa herramienta didáctica para el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos.

En cuanto a la expansión del triángulo didáctico para incluir la tecnología, Bower (2008) implementó el concepto del triángulo didáctico para examinar la interacción entre la tecnología y el aprendizaje. A través de su investigación, propuso un modelo extendido del triángulo didáctico que incorpora la tecnología, ilustrando cómo la tecnología puede alterar las relaciones entre el profesor, el estudiante y el saber.

Además, Trouche, Gueudet y Pepin (2019) discutieron cómo la tecnología está cambiando la forma en que los estudiantes y los profesores interactúan con el saber matemático. Su propuesta incluyó la expansión del triángulo didáctico para incorporar "recursos", que abarcan las tecnologías digitales.

Estas investigaciones subrayan el papel fundamental que desempeñan la teoría de grafos y la incorporación de la tecnología en el triángulo didáctico. Aunque estas investigaciones no han implementado exactamente la metodología que proponemos en esta tesis, ofrecen un fuerte respaldo a la viabilidad y relevancia de nuestro enfoque.

CAPÍTULO 3. SOBRE EL USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA EDUCACIÓN

LAS TIC Y LA EDUCACIÓN EN LA SOCIEDAD DEL CONOCIMIENTO

La sociedad del conocimiento

Desde la creación de la Universidad de Bolonia, a fines del siglo xi, hasta hoy, las universidades han buscado siempre un balance entre la autonomía y los límites establecidos por la Iglesia, los reyes, el Estado, entre otros. A lo largo de este tiempo, fueron desarrollando nuevos cursos y nuevas áreas del conocimiento a tono con la evolución de la sociedad. Por ejemplo, con la llegada de la revolución industrial, los estudiantes necesitaron adquirir conocimientos técnicos vinculados al uso de las máquinas, conocimientos que les facilitaran un ingreso rápido al mercado laboral. Esto provocó que el número de universidades e instituciones de educación superior creciera notablemente hacia fines del siglo xix en Europa y en Estados Unidos.

Con el paso del tiempo y el desarrollo de la tecnología, las sociedades fueron creando nuevos puestos de trabajo; para ellos, no se requería “mano de obra”, sino “cabeza de obra”. Es decir, surgieron empleos que demandaban mayor formación y capacidad intelectual que destreza física, por ejemplo, puestos en biotecnología, telecomunicaciones, finanzas, electrónica, salud, entre otros. Este sector económico comenzó a conocerse como el “sector de servicios”; y para los años sesenta, había destronado el liderazgo económico de los sectores de producción agrícola e industrial. Según Castells (1999), el auge del sector de servicios generó una nueva era en la sociedad, la era de “la sociedad del conocimiento y de la información”. Otros autores, entre los que se destaca Peter Drucker, subrayaron la importancia de la productividad del conocimiento

basado en la sistematización y organización de la información. Drucker (1993) vaticinó que, en el futuro, el conocimiento sería la fuente de producción de la riqueza y que se convertiría, por lo tanto, en un factor de gran importancia en relación con los otros relacionados la productividad, tales como el capital, la tierra y el trabajo de la era industrial. Este desarrollo de la sociedad del conocimiento, también, colocaría a las tecnologías de la información y la comunicación en un eje central, lo que transformaría radicalmente los mercados, la economía y la estructura de la industria.

Las innovaciones que trajo la era del conocimiento impactaron inevitablemente en los centros educativos. La manera en la que estos fueron afrontando los cambios les permitieron mantenerse como uno de los ejes principales del Estado. En la actualidad, desde su creación, se encuentran en un momento de desarrollo pleno. Pero, a pesar de que el panorama general revele que la universidad se va adaptando con naturalidad a las novedades, la realidad no siempre lo refleja: si bien estas instituciones son sensibles a los cambios, lograr la materialización de las transformaciones necesarias en su estructura toma tiempo y dedicación. Para ponerse a tono con la época, deberían evolucionar en forma más permeable y veloz, deberían tener la capacidad de adaptarse al ritmo que marca la sociedad y moldearse a las necesidades que la modernidad impone.

Se sabe que el desarrollo económico está ligado a la habilidad de los sistemas educativos de adaptarse a las demandas de la sociedad del conocimiento. En consecuencia, las instituciones educativas más permeables al cambio, las que lo hacen de manera más efectiva, son las que elevan la competitividad; no solo de ellas mismas, sino también de la sociedad en las que están insertas. En conclusión, necesitamos instituciones educativas que se adapten a las necesidades presentes.

La revolución tecnológica: Las computadoras personales y la Internet

A fines de los ochenta, aparece en muchos hogares una nueva herramienta tecnológica: la computadora personal. Esta aparición determinó los comienzos de una nueva revolución social: la revolución tecnológica. Tanto los individuos como los centros educativos y demás organismos empezaron a darse cuenta de que el uso de computadoras iba a resultar imprescindible en la vida cotidiana, ya que se había comenzado a popularizar su manejo y se había convertido en un objeto más asequible; y no en uno destinado solo a un grupo selecto de investigadores, como lo había sido hasta ese momento.

Al principio, en las universidades (o las instituciones educativas, en general), el aprovechamiento de la tecnología se limitó, por un lado, a la enseñanza del funcionamiento de las máquinas, es decir, al manejo herramientas o programas y, por el otro, a mejorar las tareas administrativas. Esta situación se observó en muchos sectores económicos, en los que se simplificaron tareas a partir del uso de determinados programas: llevar registros (Microsoft Excel), escribir notas (Microsoft Word), hacer cálculos básicos (Microsoft Excel o alguna herramienta matemática básica), etcétera. En esta etapa, aún no se promovió una puesta en práctica de la tecnología en pro del desarrollo o de la creación de nuevos conceptos aplicados a diferentes ramas del conocimiento.

Con el paso del tiempo y con el crecimiento exponencial que tuvieron las computadoras personales y otras tecnologías, el entrenamiento inicial sobre el empleo de determinados programas se hizo más pobre y limitado. Sin duda, la tecnología progresaba a toda velocidad, y los centros educativos no tenían la capacidad para adaptarse a las nuevas tecnologías y asumir el desafío de los cambios. Las universidades no explotaban el potencial de la tecnología en pos de cambiar el modo en el que se enseñaba o se aprendía como, por ejemplo, facilitar y aumentar el

acceso al conocimiento, brindar posibilidades de estudio a distancia, mejorar la calidad de la enseñanza de ciertos contenidos, entre otros.

Llegados los años noventa, aparece en escena la Internet, y con ella la revolución tecnológica de la información. Internet permitió que personas que no estaban ligadas a sectores académicos, científicos o gubernamentales accedieran a numerosas fuentes de información sin necesidad de salir de su casa. Con su expansión, la tecnología se introdujo en la sociedad de múltiples maneras, tantas que, a veces, no somos conscientes de ello. La World Wide Web (WWW) pasó de cien sitios webs en 1993 a más de 200.000 en 1997. Hoy, es muy común leer un diario en el celular, ver televisión en televisores inteligentes, enviar correos electrónicos desde cualquier computadora (¡incluso desde un reloj!), entre otras tantas aplicaciones. En cuanto a los usuarios, el número de personas que usaba Internet en 1996 se calculó en 40 millones y, en 2013, había ascendido a más de 2500 millones. Según los datos del Banco Mundial, en 2018, el 49,7% de la población mundial usaba Internet; y en la Argentina, este promedio subió a 74,2% en 2017 (Banco Mundial, 2018).

Para el 2000, la Web se había convertido en algo más que solo un lugar para encontrar información. Para esta época, apareció la web semántica —como la define Berners-Lee (2001)—, que creció como una extensión de la Web convencional, una red de documentos “más inteligentes” que, a su vez, permitían búsquedas más inteligentes, lo que habilitaba a que las personas trabajasen de una manera mucho más cooperativa. Este nuevo tipo de Web facilitaba la interacción entre los usuarios y con la red al mismo tiempo, lo que generó la posibilidad de compartir experiencias, conocimientos e información general.

Ante esta nueva herramienta, algunas instituciones educativas o empresas relacionadas con la educación comenzaron a utilizar la Internet y la tecnología en las prácticas educativas. Ejemplos

de estas nuevas herramientas tecnológicas aplicadas a la educación los encontramos en los orígenes de los Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA) o en los Sistemas de Gestión de Aprendizaje (SGA o Learning Management System - LMS), *software* que se instalan en servidores web y que sirven para administrar, distribuir y controlar actividades de educación *online* en una institución u organización. En países como Inglaterra, el uso de LMS se volvió muy popular, pasó de un 7% en 1994 a un 85% en 2003 (Britain y Liber, 2004).

Esta expansión permitió que muchas personas e instituciones contaran con un mayor espectro de oportunidades para utilizar la tecnología como un puente hacia la creación de conocimiento y la diagramación de nuevas formas de enseñanza. Un ejemplo de esto es el aprendizaje electrónico o *e-learning*, que representa la utilización de las tecnologías con gran amplitud: desde el uso de la computadora en las aulas de clase hasta la creación de carreras virtuales. La enseñanza virtual permite gran flexibilidad a la hora de gestionar el aprendizaje y de adquirir conocimiento: el acceso a Internet habilita el aprendizaje de manera autodidacta, suministra instrumentos de aprendizaje informal y, también, facilita la creación de aulas virtuales.

Este empleo de la Internet se conceptualizó en la idea de la Web 2.0. Esta noción se refiere a la posibilidad que brindan las páginas web para pasar de ser un usuario pasivo (que solo lee información disponible o Web 1.0) a un usuario activo que interactúa con la web y con otros usuarios. La llegada de la Web 2.0 produjo un cambio social que modificó por completo la relación que los usuarios tenían con la información porque, básicamente, los hizo parte de ella y reafirmó así las nociones previas sobre la sociedad de la información.

Las Universidades, la tecnología e Internet

Una de las universidades precursoras en el uso de tecnología e Internet aplicadas a la enseñanza fue el Massachusetts Institute of Technology (MIT), que, hacia 1999, comenzó a debatir cómo debía posicionarse la institución en el ambiente de *e-learning*; y luego de años de trabajo, en 2002, lanzaron el MIT OpenCourseWare, una colección abierta y gratuita de material de miles de cursos del MIT cuyo objetivo era proveer un nuevo modelo para la difusión de conocimiento y estimular la colaboración entre estudiantes de todo el mundo para así contribuir con lo que denominaron “bienes comunes intelectuales compartidos”.

Para 2005, el número de universidades que optaron por crear sus propias plataformas de educación virtual había crecido considerablemente, pero aún faltaba mucho camino por recorrer y experiencias por desarrollar –la sociedad del conocimiento demandaba un mayor esfuerzo–. Como escribió la UNESCO (2005): “[...] la creación de sociedades del conocimiento será imposible, a no ser que los países ricos y la comunidad internacional realicen esfuerzos importantes y enérgicos para desarrollar las infraestructuras tecnológicas de los países en desarrollo. Sin infraestructuras materiales, el universo virtual es un puro espejismo”.

El desarrollo de tecnologías digitales y de nuevos recursos computacionales y el aumento en los datos disponibles en la Internet originó la creación de nuevas áreas de estudio, tales como Learning Analytics (LA) o Educational Data Mining (EDM), que Campbell y Oblinger (2007) definen como el uso de técnicas estadísticas y de minería de datos que pueden ayudar a los miembros de las facultades y a los consejeros educativos a identificar más efectivamente a los estudiantes “en riesgo” y, así, responder a sus demandas. Una de las aplicaciones es mejorar la retención escolar o estudiar el impacto que tienen los recursos tecnológicos en la comunidad estudiantil para poder brindar estrategias que mejoren los resultados en el aprendizaje.

Respecto al EDM, Grisales (2018) agrega:

[...] Muchos de los estudios que se dieron en esta línea de trabajo estuvieron basados en la idea de que las tecnologías digitales deberían tener un impacto positivo en los procesos educativos de la misma manera como lo tuvo en otros campos tales como el laboral, los medios de comunicación y el entretenimiento (García Aretio, 2017). Este supuesto se basa en el aumento exponencial que tuvo la disponibilidad de recursos tecnológicos en el mercado, el auge de herramientas y aplicaciones con mayor disponibilidad para el usuario común y la demanda de recursos tecnológicos por parte de los centros educativos. Sin embargo, este tipo de análisis fue requiriendo una revisión mucho más exhaustiva con el fin de determinar el impacto real de las tecnologías digitales en la calidad y pertinencia del aprendizaje. [...]

Otro aspecto que evidenció un gran desarrollo gracias a la masificación de la Internet fue la forma de compartir información y conocimiento, hecho que trascendió a los medios de comunicación convencionales (televisión, periódicos, radio) y a los espacios convencionales de aprendizaje (universidades, centros de educación, escuelas). Las personas comenzaron a utilizar las redes libremente, a crear contenidos, a compartir información, a enseñar, a vender; y fueron ellas quienes empezaron a administrar las aplicaciones de acuerdo con sus intereses. El *boom* desarrollado por plataformas como Facebook, MySpace o Twitter permitió crear comunidades o grupos de usuarios especializados en temas específicos (programación, literatura, cocina, animales domésticos, la variedad es infinita).

Farnós (2011) hace hincapié en que las instituciones educativas deben aprovechar las redes sociales como una herramienta didáctica dado el gran número de personas que las usan y la cantidad de tiempo que emplean en ellas. “La escuela es una parte de la sociedad y la sociedad cada vez emplea más las redes sociales. Por lo tanto, debemos seguir esta inercia y no solo emplearlas, sino también orientar a los aprendices en su buen uso”, asegura Farnós.

Llegado 2006, la masificación de la información disponible en Internet y la diversidad de los dispositivos móviles hicieron necesario desarrollar una tecnología en la que los usuarios pudieran manejar los datos de manera segura, dispusieran de ella cuando lo requirieran y, sobre todo, que estuviera sincronizada en todos los dispositivos. Es así como aparecieron soluciones como “la computación en la nube”. La computación en la nube pasó de ser una tecnología de almacenamiento de archivos y procesamiento de datos a través de Internet a un recurso de colaboración, al que se puede acceder desde cualquier lugar, ordenador, *tablet* o celular y trabajar/intercambiar con cualquier persona que tenga acceso a Internet. Otra de las ventajas fue la de acceder a computadoras de alta tecnología –cuyos servidores realizan las operaciones a gran velocidad y devuelven el resultado final al usuario– a un costo muy bajo, algo impensable, ya que las computadoras de alta gama solo se encontraban en unos pocos centros de investigación. En este sentido, la computación en la nube ofrece, por ejemplo, la posibilidad de pagar recursos informáticos o de computación en una base por un tiempo determinado (usar algunos procesadores por unas horas o almacenar cierta cantidad de información por algunos días) y volver a contratarlos cuando se los necesite.

Los recursos de la computación en la nube ayudaron a las instituciones educativas y beneficiaron en gran medida el campo de la educación. A partir de su aplicación, fue posible desarrollar ambientes educativos virtuales mucho más robustos (reduciendo notablemente los costos de infraestructura), facilitar el acceso a la educación (permitiendo el acceso a plataformas desde diferentes dispositivos), aumentar la seguridad de los datos guardados, disminuir la necesidad de *hardware* potente, y muchos más aportes y ventajas.

Entre las oportunidades que se presentaron, se produjo un incremento en el desarrollo de los Cursos Masivos Abiertos en Red (MOOC, por sus siglas en inglés), cursos en línea dirigidos a un

número ilimitado de participantes a través de Internet. Por ejemplo, Harvard University, Berkeley University of California y otros centros de educación superior proponen cursos abiertos *online*. Estas universidades ofrecen los MOOC a través de varias plataformas, EdX, Coursera, OpenCourseWare, entre otras, lo que ha permitido explorar nuevos caminos en el uso de la tecnología aplicada a la enseñanza y el aprendizaje en el siglo xxi. En particular, colaboran con la demanda de formación continua que requiere la sociedad actual y lo hacen de manera flexible y compatible con las demás actividades que las personas deben desarrollar, algo imposible de realizar bajo la formación educativa tradicional.

Una cuestión queda flotando: ¿el usufructo que hacemos de la tecnología es suficiente o tenemos que mejorarlo? A esta incógnita podríamos agregarle algunas de las preguntas que plantea la UNESCO y reflexionar sobre el futuro de la tecnología en la educación y en las aulas: “¿Las comunidades virtuales pueden reemplazar verdaderamente a las comunidades reales en todos los planos? ¿La tutoría a distancia es capaz de suscitar y mantener el deseo y la motivación de aprender? ¿Distancia y confianza pueden ir al unísono? ¿Cómo garantizar que el aprovechamiento compartido en el plano pedagógico no sufra las consecuencias de las múltiples formas de apropiación de los conocimientos?”.

USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA EN LOS ULTIMOS AÑOS

COVID e impacto en la educación

Desde fines de 2019, fuimos testigos de los cambios drásticos que la pandemia del COVID-19 ha provocado en todo el mundo: la economía, la política, la educación y la salud han sufrido un gran impacto por sus efectos. Algunos gobiernos optaron por aplicar leyes que restringieron el movimiento de las personas con el objetivo de evitar la propagación del virus. En algunos casos,

se bloquearon las fronteras para impedir el acceso de turistas o trabajadores extranjeros; en otros, se tomaron medidas preventivas, como cursar la cuarentena en las propias viviendas. Estas políticas cambiaron radicalmente la forma en la que las personas trabajaban y estudiaban. El *home office* se convirtió, para numerosos trabajadores, en “la normalidad”; mientras que, para muchos estudiantes, la única solución fue la de asistir a clase de manera *online*.

Esta inesperada pandemia hizo que muchas instituciones educativas tuvieran que adaptarse, en muy poco tiempo, a la modalidad de enseñanza *online*. Este desplazamiento de la enseñanza tradicional a la enseñanza a través de Internet u otra red de datos implica una serie de cuestiones que hay que considerar. Por un lado, docentes y estudiantes tienen que prepararse para dominar las nuevas herramientas tecnológicas; por el otro, las instituciones educativas tienen que brindar una plataforma tecnológica robusta para que las clases se puedan llevar a cabo y, además, optimizar el acceso a las herramientas para la mayoría de los estudiantes.

De acuerdo con el Foro Económico Mundial, antes del comienzo de la pandemia ya existía un crecimiento en la utilización y el desarrollo de tecnologías aplicadas a la educación que, al finalizar 2019, implicó inversiones por parte de las empresas dedicadas al rubro de cerca de \$18.66 billones de dólares. Debido al aumento en el uso de estas tecnologías (sea para tutorías virtuales, herramientas de video conferencia o *softwares* de enseñanza *online*), algunos estudios prevén, para el 2025, una proyección de \$350 billones de dólares en el rubro (World Economic Forum, 2020). Estados Unidos y China lideran el rango del mercado de educación *online* a nivel mundial debido a la introducción de cursos *e-learning* y programas de educación a distancia, y también de programas educativos basados en realidad aumentada. Para citar un ejemplo, Zoom, una de las aplicaciones tecnológicas más utilizadas para realizar videoconferencias en instituciones educativas, pasó de tener ingresos de \$623 millones de dólares en 2019 a \$2,6

billones de dólares en 2020 y a \$4,09 billones de dólares en 2021. Este incremento en sus ganancias se ve reflejado en el número de usuarios de la plataforma, que pasaron de 10 millones en 2019 a 350 millones al finalizar 2020 (Zoom, 2022).

En el ámbito regional, el aumento del uso de herramientas tecnológicas trajo aparejado el problema del financiamiento para lograr la continuidad de las clases, en gran medida a cargo de las instituciones educativas y de los estudiantes. Arias et al. (2021) realizaron un estudio en el que analizaron la respuesta de gobiernos, instituciones de crédito educativo y universidades de distintos países de América Latina y el Caribe al financiamiento de los estudiantes durante la pandemia del COVID-19. Según este estudio, se aumentaron los recursos físicos y digitales para las instituciones de educación superior y para los estudiantes en sus domicilios; se otorgaron subsidios a raíz del aumento en las tasas de desempleo y en el deterioro de las condiciones económicas de los hogares; se adoptaron medidas de apoyo indirecto a los estudiantes materializadas en transferencias extraordinarias directas a las universidades públicas e inversión en recursos físicos, técnicos y pedagógicos; se aprobaron medidas de apoyo directo enfocadas en la ayuda financiera para estudiantes, como congelamiento de cuotas o alivio de deudas, ampliación de plazos para la postulación de becas, créditos educativos y reducciones en las tasas de interés.

En relación con las distintas modalidades de enseñanza, las instituciones de educación superior escogieron tres opciones: clases presenciales en las sedes, sistema híbrido con clases presenciales y *online*, o clases virtuales únicamente. Algunas instituciones adoptaron un receso académico durante el cual no hubo actividades de instrucción.

La Figura 18 muestra un mapa de la reapertura de la educación en América Latina y el Caribe durante la epidemia de COVID-19 en julio de 2021; y la Figura 19, en diciembre del mismo año.

En ambas, puede observarse que la mayoría de los países de la región optaron por modelos que incluían la modalidad en línea; son pocos los que mantuvieron la modalidad abierta. Para fines de 2021, solo Uruguay ofrecía una modalidad abierta, mientras que, en el resto de la región, prevaleció la modalidad parcialmente abierta (sistema híbrido).

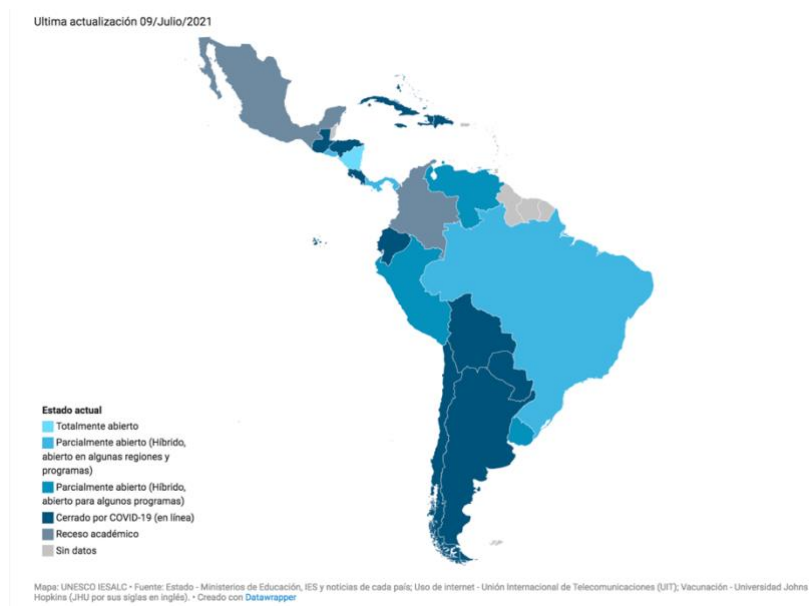


Figura 18. Reapertura de la educación superior en América Latina y el Caribe durante COVID-19 a julio del 2021.

Fuente: Unesco.

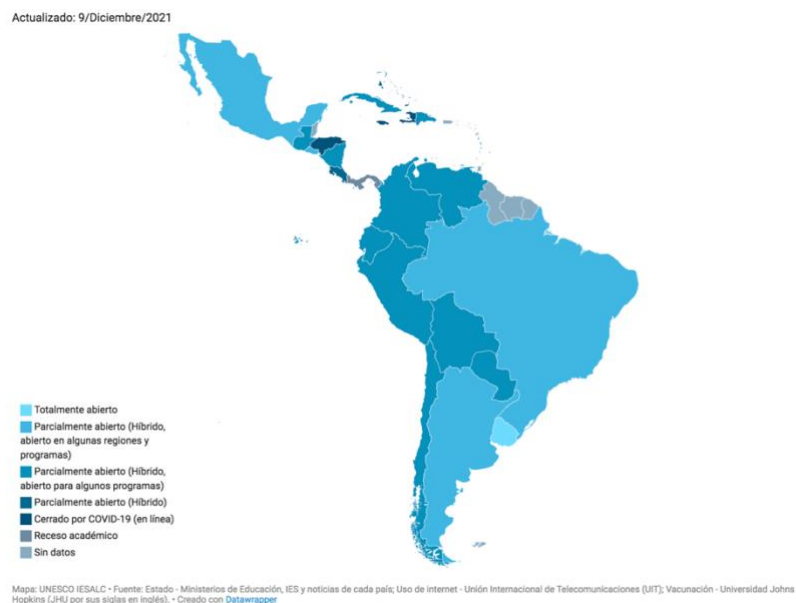


Figura 19. Reapertura de la educación superior en América Latina y el Caribe durante COVID-19 a diciembre del 2021.

Fuente: Unesco.

EL CONCEPTO DE HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS EN EL CONTEXTO DE ESTA TESIS

En lo que continua de esta tesis, las “herramientas tecnológicas” se refieren a un amplio rango de recursos digitales y dispositivos electrónicos que se usan para crear, almacenar, compartir y utilizar información de manera eficiente. En este contexto, cuando nos referimos a las herramientas tecnológicas, se incluyen tanto hardware (por ejemplo, computadoras, tabletas, teléfonos inteligentes) como software (por ejemplo, programas de aprendizaje, aplicaciones educativas, plataformas de gestión del aprendizaje) que facilitan y enriquecen el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Las herramientas tecnológicas se han vuelto cada vez más prominentes en la educación, proporcionando un sinfín de oportunidades para facilitar y mejorar la enseñanza y el aprendizaje. Estas herramientas pueden facilitar la personalización del aprendizaje, el acceso a una amplia gama de recursos y materiales de aprendizaje, la colaboración y la comunicación, y el desarrollo de habilidades del siglo xxi, como la alfabetización digital, el pensamiento crítico y la resolución de problemas (Voogt, Erstad, Dede, & Mishra, 2013).

Además, en nuestro contexto, las herramientas tecnológicas también pueden servir como medio para la creación de contextos de aprendizaje auténticos, que permiten a los estudiantes aplicar lo que aprenden a situaciones y problemas del mundo real (Herrington, Oliver & Reeves, 2003).

CAPÍTULO 4. SOBRE EL MODELO DEL TETRAÉDRO DIDÁCTICO (TED)

METODOLOGÍA Y ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN

Este proyecto propone un modelo que represente los procesos de enseñanza-aprendizaje existentes, que incluya la tecnología y que establezca las interacciones estructurales introducidas por esta al triángulo estudiante-conocimiento-docente con la intención de que pueda ser utilizado como una herramienta para futuras investigaciones sobre el uso y las implicaciones de la tecnología en la educación.

En cuanto a la elección de la metodología, se realizaron consideraciones previas de diversos enfoques cualitativos, como la investigación etnográfica, la investigación narrativa, y la teoría fundamentada. Finalmente, se optó por una combinación de análisis conceptual y teoría de grafos debido a su habilidad para representar de manera clara y visual la dinámica y la interconexión entre los componentes de los procesos de enseñanza-aprendizaje, especialmente en el contexto de la inclusión de la tecnología en estos procesos (Bikner-Ahsbahr & Prediger, 2010).

Para la recolección de datos, se hará uso de la documentación existente sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje, incluyendo publicaciones académicas y experiencias previas de los investigadores. Estos documentos se analizarán para identificar los conceptos clave y las relaciones entre ellos (Corbin & Strauss, 2008).

El análisis de los datos se realizó en dos pasos:

1. El análisis conceptual: En este paso, se identificarán los conceptos clave de los procesos de enseñanza-aprendizaje y se analizarán en el contexto de la inclusión de la tecnología. Esto se

realizará a través de la revisión de la literatura existente y la extracción de las ideas y teorías más relevantes (Sowa, 2000).

2. La teoría de grafos: Una vez que se han identificado los conceptos clave, se utilizará la teoría de grafos para representar estos conceptos y las relaciones entre ellos. Este paso permitirá visualizar de manera más clara la complejidad y la interconexión de los procesos de enseñanza-aprendizaje y cómo se ven afectados por la inclusión de la tecnología (Chartrand & Zhang, 2012).

Además, la aplicación de la metodología del análisis conceptual y de la teoría de grafos nos permite responder a necesidades específicas para este proyecto como lo son:

a. Necesidad de un Marco Teórico sólido:

El análisis conceptual es una herramienta poderosa para establecer un marco teórico sólido. A través del análisis de conceptos clave, podemos formar una comprensión profunda de las ideas y teorías existentes en el campo de la educación. Al hacer esto, podemos estar seguros de que nuestro modelo conceptual está basado en una base sólida y puede contribuir a la comprensión teórica en el campo de la educación.

b. Identificación y Exploración de Nuevas Relaciones:

El principal objetivo de esta tesis es explorar cómo la adición de la tecnología al triángulo didáctico de Houssaye genera nuevas relaciones relevantes en el campo de la educación actual. La teoría de grafos es una herramienta matemática diseñada para modelar relaciones entre objetos. Al aplicar esta herramienta a nuestros conceptos clave, podemos visualizar y analizar estas nuevas relaciones de manera sistemática y rigurosa.

c. Adaptabilidad al Cambio:

La educación está en un estado de constante cambio, especialmente con la rápida evolución de la tecnología. El análisis conceptual nos permite adaptarnos a estos cambios al proporcionar una estructura que puede ser actualizada y refinada a medida que surgen nuevas teorías, tecnologías y hallazgos de investigación. De esta manera, el modelo que generamos seguirá siendo relevante a medida que cambia el panorama educativo.

d. Claridad y Comunicación:

Un beneficio adicional de utilizar la teoría de grafos para representar nuestro modelo es que los grafos son visuales y relativamente fáciles de entender. Esto puede facilitar la comunicación de nuestras ideas a un público amplio, incluyendo educadores, investigadores, y responsables de la formulación de políticas.

Con este enfoque, esperamos construir un modelo que sea robusto y relevante para la educación en la era digital, que pueda ser una herramienta útil para la investigación futura en este campo.

Por último, sobre la mirada cualitativa que aborda el presente proyecto, Hernández Sampieri (2014) enuncia y explica las características principales de este tipo de investigación, las cuales concuerdan con el interés de esta tesis y justifican la aplicación de una perspectiva cualitativa a la investigación.

Las características más relevantes son:

- El investigador comienza examinando los hechos y, durante el proceso de investigación, desarrolla una teoría coherente que represente lo que observa.

- Las hipótesis de investigación se generan durante el desarrollo del proyecto y se van perfeccionando conforme se recoge más información.
- Las indagaciones realizadas ofrecen respuestas o conclusiones aplicables a poblaciones particulares.
- “El enfoque cualitativo puede concebirse como un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo ‘visible’, lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos. Es naturalista (porque estudia los fenómenos y seres vivos en sus contextos o ambientes naturales y en su cotidianidad) e interpretativo (pues intenta encontrar sentido a los fenómenos en función de los significados que las personas les otorguen)” Hernández Sampieri (2014).

ETAPAS DE LA INVESTIGACION

Siguiendo la metodología del análisis conceptual y usando los fundamentos de la teoría de grafos, la presente tesis fue realizada siguiendo las siguientes etapas.

1. Identificación de Conceptos Clave:

El modelo conceptual que deseamos construir se basará en varios conceptos esenciales.

Primero, tenemos los tres vértices del triángulo didáctico de Houssaye: el profesor, el estudiante y el saber. Cada uno de estos elementos desempeña un papel crucial en el proceso educativo. El "profesor" es quien imparte el conocimiento, el "estudiante" es quien recibe ese conocimiento y "el saber" es el cuerpo de conocimiento que se transmite. A estos tres conceptos, añadiremos el de "herramientas tecnológicas". Esta categoría incluirá todos los dispositivos y tecnologías

digitales que se usan en la educación, tales como ordenadores, tabletas, Internet, software educativo, etc. (Artigue, 2002). Las definiciones precisas sobre los conceptos claves aparecen en los previos capítulos contenidos dentro del marco teórico de esta tesis, y se ven reflejadas en las fases 1, 2 y 3 del desarrollo del modelo en la siguiente sección.

2. Creación del Modelo Conceptual:

Una vez identificados y definidos los conceptos, se utilizó la teoría de grafos para crear el modelo conceptual. En un grafo, los conceptos (profesor, estudiante, saber, tecnología) se representan como vértices, y las relaciones entre ellos son las aristas. Al añadir el vértice de la tecnología al triángulo didáctico de Houssaye, el modelo se convierte en un grafo completo, donde cada vértice está conectado con todos los demás. Esto permite que se contemplen nuevas relaciones que no eran evidentes en el modelo de Houssaye. Esta etapa se ve reflejada en la fase 4 y 5 del desarrollo del modelo en la siguiente sección.

3. Análisis de las Relaciones:

Una vez que el modelo fue construido, se realizó un análisis en profundidad de las relaciones entre los vértices. En este análisis, se examinó cómo la tecnología (en su papel como una herramienta de aprendizaje) afecta las relaciones entre el profesor, el estudiante y el saber. Este proceso implicó la exploración de la influencia que la tecnología tiene en la enseñanza, el aprendizaje y la transmisión de conocimiento. Por ejemplo, los cambios en la forma en que los estudiantes interactúan con el saber, cómo el profesor enseña, o incluso cómo se genera el saber (Rabardel & Bourmaud, 2003). Esta etapa se manifiesta en la parte final de la fase 5 del desarrollo del modelo.

4. Evaluación y Ajustes del Modelo:

En la etapa final se estudió la efectividad y relevancia del modelo conceptual. Una posterior evaluación fuera de los alcances de esta tesis permitirá determinar si el modelo es capaz de describir y explicar de manera adecuada la realidad educativa en la era digital. Se solicitarán opiniones y comentarios de expertos en la educación y tecnología, y estas opiniones se utilizarán para realizar ajustes en el modelo, mejorando su precisión y utilidad (Trouche, 2004). Resultados de esta etapa se plasman en las conclusiones y preguntas abiertas a futuro en la parte final de esta tesis.

DESARROLLO DEL PROYECTO

Siguiendo el modelo de investigación mencionado, el proyecto fue elaborado en cinco fases.

1. Nacimiento de la idea de investigación.

La idea original surge, aproximadamente, en 2016, cuando un grupo de docentes de Matemática se mostró interesado en encontrar cómo mejorar el modo en que los estudiantes de primer año de la UADE se apropiaban de ciertos conceptos de Álgebra. Lo primero fue reconocer las dificultades que presentaban, luego, analizarlas y, finalmente, descubrir recursos novedosos que los ayudaran a resolverlas.

Con el objetivo de entender la problemática, se hizo un estudio diagnóstico-descriptivo en el que se analizaron y categorizaron los errores cometidos en los exámenes finales (previos y regulares) de la materia Álgebra y Geometría analítica; particularmente, los referidos al tema de rectas y planos. Se analizaron 16 exámenes de 310 estudiantes de la UADE tomados a lo largo de 2013, 2014 y 2015. Luego de recopilar las respuestas y de hacer una revisión bibliográfica

acorde, se realizó una taxonomía de los errores encontrados que permitió, entre otras cosas, observar un problema de gran interés. Muchos de los estudiantes manifestaban una dificultad en abstraer y diferenciar las propiedades de los objetos en R^2 o en R^3 . Este problema suele estar asociado a la dificultad que tienen para observar figuras tridimensionales dibujadas en el pizarrón, que es un objeto bidimensional. Dicho de otra manera, los objetos en R^2 o en R^3 se dibujan en una misma superficie, lo que hace que todos sean planos y que los estudiantes los perciban así. Lo interesante de este problema es que existe una herramienta sencilla que podría solucionar el inconveniente: los gráficos por computadora. Sin embargo, en la actualidad, no se usan en todas las aulas, al menos, no masivamente. Hasta el momento, no se pensó en incluir los gráficos por computadora como una herramienta fundamental de la enseñanza; sin embargo, su uso (y el de otras herramientas tecnológicas) puede mejorar, de un modo sencillo, la concepción que se tiene sobre la bidimensionalidad o tridimensionalidad de un objeto.

Finalizada la investigación y enfocada la motivación en el uso de las nuevas tecnologías aplicadas a la enseñanza, surgió el núcleo central: los efectos estructurales producidos al incluir un nuevo vértice (la tecnología) en la clásica relación triádica estudiante-concepto-docente.

Se recomienda revisar Bravo y Patiño (2016) para la lectura completa de la idea inicial de esta investigación.

Motivaciones para el Estudio y Extrapolación a Diferentes Áreas de la Matemática

Es importante enfatizar que los datos recopilados de exámenes de álgebra y geometría analítica y las observaciones de actividades en el aula, no son los fundamentos de la tesis en sí. Estos datos y observaciones se utilizan como inspiración y motivación para explorar cómo la

introducción de un cuarto vértice, la tecnología, en el triángulo didáctico de Houssaye podría impactar en las relaciones entre los vértices existentes y revelar nuevas relaciones.

Las experiencias y las percepciones recolectadas de estos exámenes pueden ser extrapoladas a diferentes conceptos y ramas de la matemática. En matemática, existen varios conceptos y principios fundamentales que se replican en diferentes áreas. Algunos de estos incluyen el pensamiento geométrico, el pensamiento lógico y el pensamiento algebraico.

El pensamiento geométrico, que implica la visualización, la intuición espacial, la geometría de transformación, entre otros, es esencial en campos tan diversos como la geometría analítica, el cálculo y la estadística (Battista, 2007). Por su parte, el pensamiento lógico, que comprende la deducción, la inducción, la inferencia y la justificación, desempeña un papel crucial en prácticamente todas las ramas de la matemática (Stylianides & Stylianides, 2009). Además, el pensamiento algebraico, que implica la generalización, la abstracción, la simbolización y la manipulación simbólica, se extiende más allá del álgebra a áreas como el cálculo y la teoría de números (Kieran, 2007).

Por lo tanto, aunque los datos y las observaciones se obtuvieron específicamente del contexto del álgebra y la geometría analítica, las implicaciones de este estudio pueden tener un alcance más amplio, extendiéndose a través de estas y otras áreas de la matemática.

2. Planteamiento del problema de estudio.

Luego de una revisión bibliográfica en la que se estudiaron algunas metodologías de enseñanza de la matemática que involucran herramientas tecnológicas y la postulación de modelos pedagógicos actuales, se puso de manifiesto la falta de un modelo similar. Razón por la

cual se decide empezar a plantear las bases para entender la problemática de una manera más estructurada. Este proceso llevó al planteamiento del problema de esta tesis junto con los objetivos de investigación, las preguntas de investigación y la justificación.

3. Revisión bibliográfica.

Se consultó una serie bibliográfica que puede ser reunida en tres grupos, y cuyos resultados principales son recopilados en el marco teórico de esta tesis. El primero concierne a los asuntos relacionados con los conceptos de modelos: tanto matemáticos como de educación. Para ello, se buscó bibliografía acerca de la teoría de grafos, la que brindó las herramientas fundamentales para la posterior realización del modelo. Asimismo, se buscó información sobre los modelos educativos más conocidos. El segundo grupo comprende trabajos o bibliografía relacionados con el TRD, concepciones y críticas. El tercer grupo abarca una revisión literaria del uso de la tecnología en las aulas en la actualidad; algunos de los artículos analizados muestran la relevancia que ha tenido la tecnología en los últimos años, lo que terminó de motivar el desarrollo de este proyecto.

4. Inmersión inicial.

En la fase de recolección de datos, se identificaron y analizaron problemas existentes en el contexto de la enseñanza de matemática en las carreras de ingeniería en la Universidad Argentina de la Empresa (UADE). Estos problemas no fueron diseñados específicamente para este estudio, sino que forman parte del currículo de diferentes materias de matemática a lo largo de la carrera.

La elección de estos problemas se basó en dos criterios fundamentales. Primero, estos problemas presentan características intrínsecas que permiten la extrapolación de conceptos clave y habilidades necesarias en la enseñanza de la ingeniería. Segundo, estos problemas representan desafíos que requieren habilidades matemáticas que son relevantes no solo en las asignaturas de ingeniería, sino también en otros contextos académicos y profesionales.

En concreto, los problemas seleccionados para el análisis requieren habilidades como el pensamiento geométrico y espacial, y el pensamiento analítico. Estas habilidades son esenciales en muchas áreas de la ingeniería y se ven reflejadas en múltiples aspectos de la enseñanza y el aprendizaje (NCTM, 2000). Además, se ha demostrado que estas habilidades son fundamentales para la resolución de problemas, una competencia clave en la educación en ingeniería (Jonassen, 2000).

Este enfoque nos permitió identificar conceptos y habilidades fundamentales que están presentes en una amplia gama de problemas de ingeniería, y que son esenciales para la comprensión y el éxito en la disciplina. En última instancia, estas observaciones informaron el desarrollo de nuestro modelo de procesos de enseñanza-aprendizaje, proporcionando una base sólida para su validación y aplicación futura.

Estos son particularmente interesantes, ya que contienen conceptos transversales a diferentes ramas de la Matemática y requieren de variados niveles de conceptualización para entender su solución. Como se explicó en apartados anteriores, estas actividades no constituyen en sí los resultados de esta tesis, sino que su fundamentación resulta transversal y se extrapola a varios conceptos de la matemática. El objetivo de estas actividades es mostrar cómo se interpreta y analiza la relación didáctica docente-concepto-estudiante y cómo esta estructura cambia si se considera un nodo adicional que la vincule con la tecnología. Es importante que se tenga en

cuenta que este cambio no está ligado a estas actividades ni se reduce solo a ellas, sino que se predicen como estructuralmente apropiadas para considerar las profundas modificaciones que el nuevo nodo introduce en la relación triádica.

Actividad 1.

Problema 1. Dadas dos rectas l_1 y l_2 contenidas en $\mathbb{R}^3$, analizar si son concurrentes, coincidentes, alabeadas o paralelas.

El problema de intersección de dos rectas en $\mathbb{R}^3$ es un problema clásico, fundamental del Álgebra lineal. Consiste en determinar cuál es la relación (o cómo están relacionadas) de estos dos objetos geométricos según su posición en el espacio tridimensional. Las rectas son **concurrentes** cuando son coplanares (están contenidas en el mismo plano) y, además, se intersecan en un punto (llamado “punto de concurrencia”). Si son coplanares y se intersecan en más de un punto, son **coincidentes**. Si las rectas son coplanares y no se intersecan, son **paralelas**; por último, cuando las rectas no son coplanares, son **alabeadas**. Una de las ideas más importantes de este ejercicio está vinculada con el concepto de rectas coplanares, que es el que genera una clara diferencia con el problema de intersección de rectas en el plano.

Experiencias previas, dificultades y errores comunes

Para comprender la dificultad de la Actividad 1 y entender los errores cometidos por los estudiantes al resolverla, primero, es necesario considerar el problema en el plano. Supongamos que tenemos dos rectas l_1 y l_2 contenidas en el plano que pueden estar ubicadas de estas formas:

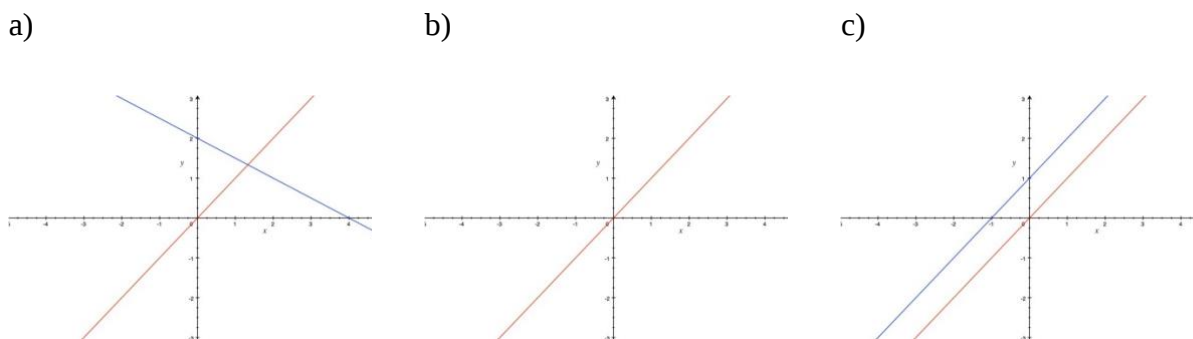


Figura 20.
Fuente: Elaboración propia

La primera observación es que, al trabajar en el plano, todas las rectas serán coplanares y, por lo tanto, las posiciones relativas entre ellas estarán determinadas solo por los posibles puntos de intersección.

En la Figura 20a, podemos apreciar dos rectas concurrentes que se intersecan en un punto (independientemente de si lo hacen de forma perpendicular o no). En la Figura 20b, las rectas se cortan en más de un punto (por lo tanto, en todos los puntos) de modo tal que las rectas se superponen una sobre la otra. La Figura 20c representa dos rectas paralelas que, definidas en el plano y sin mucho rigor matemático (o sea, sin considerar otros tipos de geometrías no euclidianas), son las que no se intersecan en ningún punto. Es importante que se comprenda cabalmente que en, el plano, si dos rectas no se cortan, esto es necesario y suficiente para determinar que son paralelas. La Figura 20a esconde de manera sutil la dificultad del ejercicio planteado originalmente.

¿Qué ocurre en $\mathbb{R}^3$?

El espacio tridimensional o $\mathbb{R}^3$ es un espacio que tiene dimensión 3 y, por lo tanto, para localizar cada uno de sus puntos, necesitamos tres números que, juntos, conforman la coordenada del punto (estos números se conocen desde siempre como las componentes x , y y z). Este espacio contiene infinitos objetos de dimensión menor, por consiguiente, incluye infinitos planos (de dimensión 2), y el concepto de coplanaridad adquiere así un significado que requiere cierta atención.

Si queremos representar una vez más las posiciones relativas de dos rectas en $\mathbb{R}^3$, nos encontramos con una dificultad: este texto y sus gráficos están impresos sobre una hoja, por ende, todos estos objetos están sobre el mismo plano. No es posible dibujar sobre papel dos rectas en diferentes planos contenidos en $\mathbb{R}^3$, entonces, es necesario hacer una representación plana del espacio tridimensional. En consecuencia, la tarea es hacer una abstracción y una representación mental de $\mathbb{R}^3$ basadas en un dibujo que está en $\mathbb{R}^2$.

La representación usual que se hace del espacio tridimensional es la que se muestra a continuación:

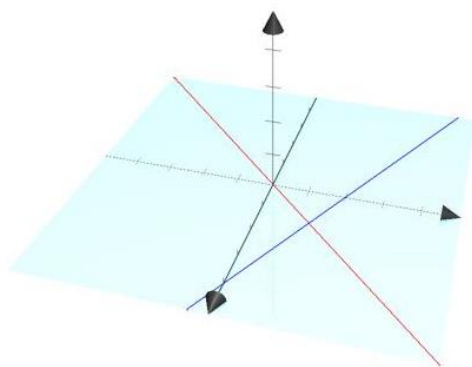


Figura 21. Representación gráfica de los ejes cartesianos en $\mathbb{R}^3$.

Fuente: Elaboración propia.

Para entender con facilidad esta representación, basta con observar la esquina de una habitación. En ella, las dos paredes se intersecan formando un eje vertical, y las paredes con el suelo forman dos ejes que se extienden perpendicularmente al eje vertical. Teniendo en cuenta esto, la posición de dos rectas en el espacio podría ser representada así:

a)



b)

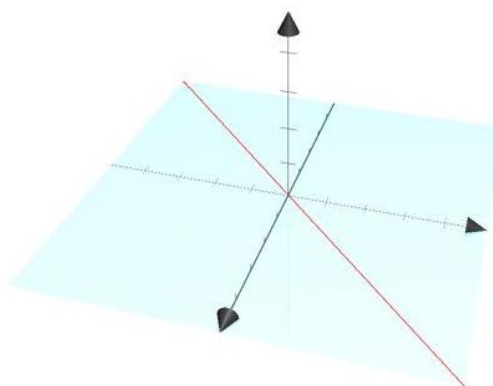


Figura 22.

Fuente: Elaboración propia

Las Figuras 22a y 22b representan rectas coplanares. En la Figura 22a, las rectas se intersecan en un punto, son concurrentes; y en la Figura 22b, se intersecan en más de un punto (por lo tanto, en todos sus puntos), son coincidentes.

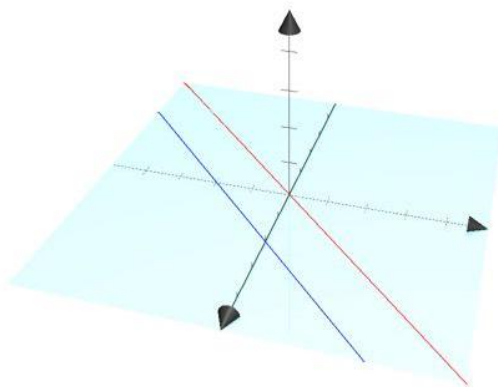


Figura 23.
Fuente: Elaboración propia

La Figura 23 representa la situación en la que dos rectas son coplanares y no se intersectan, por lo tanto, son paralelas entre sí.

Hasta el momento, hemos analizado las posiciones relativas de dos rectas que se ubican en el mismo plano, y queda claro que el resultado es similar al comentado antes. Pero a diferencia de $\mathbb{R}^2$, en este ejercicio, podemos considerar rectas que se ubiquen en diferentes planos, con lo cual podemos añadir una cuarta opción.

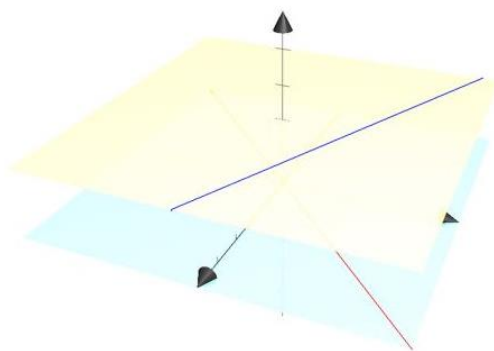


Figura 24.
.Fuente: Elaboración propia

La Figura 24 muestra la situación en la cual dos rectas están en diferentes planos, son alabeadas. Las siguientes figuras muestran lo mismo, pero desde diversas perspectivas para apreciar mejor la situación.

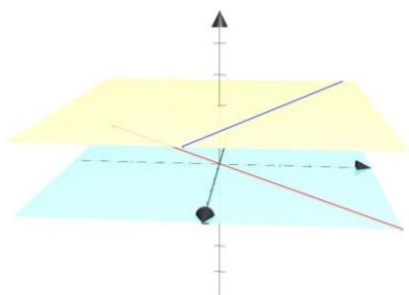


Figura 25.

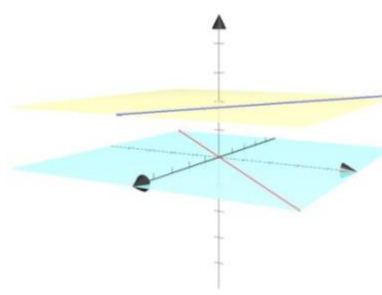


Figura 26.

Nótese cómo, en este caso (al igual que con las rectas paralelas), no hay punto de intersección, sin embargo, la condición de intersectarse es necesaria pero no suficiente para garantizar que las rectas sean paralelas, a diferencia de lo que pasa en $\mathbb{R}^2$. Lo que quiere decir que es posible dibujar dos rectas que no se corten en el espacio tridimensional, pero no es necesario que sean paralelas; y es en este último caso en el que los estudiantes tienden a cometer errores (para un mayor detalle referirse a Bravo y Patiño (2016)).

La dificultad de este ejercicio (además de los procedimientos algebraicos y aritméticos que puedan contener) radica principalmente en la visualización espacial de los objetos en $\mathbb{R}^3$. Los estudiantes suelen extrapolar propiedades que tienen validez en el plano y las llevan a contextos donde no son válidas. Por ejemplo, es muy común que analicen la intersección de las dos rectas de manera correcta; si el resultado es que las rectas no se cortan, concluyen que las rectas son paralelas, lo cual es cierto en $\mathbb{R}^2$, pero no lo es en $\mathbb{R}^3$. Esto concuerda con los resultados obtenidos en la investigación realizada en UADE (Bravo y Patiño, 2016) en la que se observaron

310 exámenes finales de Álgebra y Geometría analítica tomados en tres años y se estudiaron los tipos de errores cometidos; en particular, los relacionados con el tema rectas y planos.

Actividad 2.

Problema 2. Sean $\alpha: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 / \alpha(t) = (\sin t, \cos t)$ y $\beta: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 / \beta(t) = (\cos t + 1, \sin t)$ las trayectorias de dos objetos α y β , respectivamente. Analizar si los objetos se chocan en algún instante t .

El problema de la intersección entre dos trayectorias es un ejercicio común en los cursos de Análisis matemático. El ejercicio consiste en analizar dos condiciones entre las trayectorias: la primera es corroborar que las trayectorias recorridas por ambas ecuaciones se encuentren en, al menos, un punto (en caso de que esto no ocurra, los objetos no se podrían chocar), y la segunda es constatar que dichos objetos pasen por el punto de intersección en el mismo momento. Esta última es la que les suele traer problemas a los estudiantes. Para comprender la dificultad del ejercicio, vamos a resolverlo de la manera convencional, sin el uso de herramientas tecnológicas.

Primero, dibujamos la trayectoria definida por α ; para hacerlo, se requiere de ciertos procedimientos algebraicos que para los intereses del presente trabajo no son de importancia. Los estudiantes suelen desarrollar estos procedimientos sin mayores dificultades. La Figura 27 muestra el gráfico de la imagen de la función vectorial α .

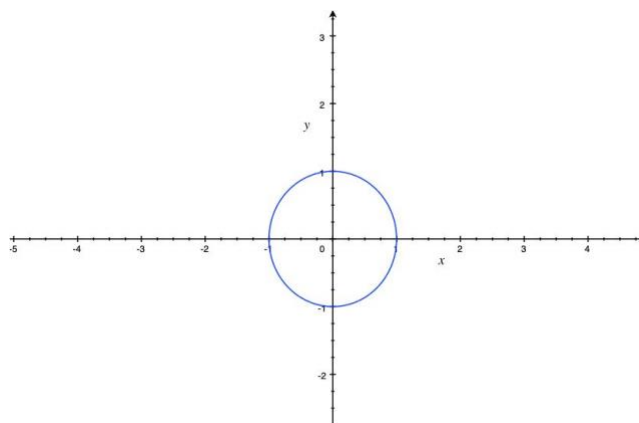


Figura 27. Trayectoria α
Fuente: Elaboración propia.

De forma análoga, graficamos la trayectoria definida por β , como puede apreciarse en la Figura 28.

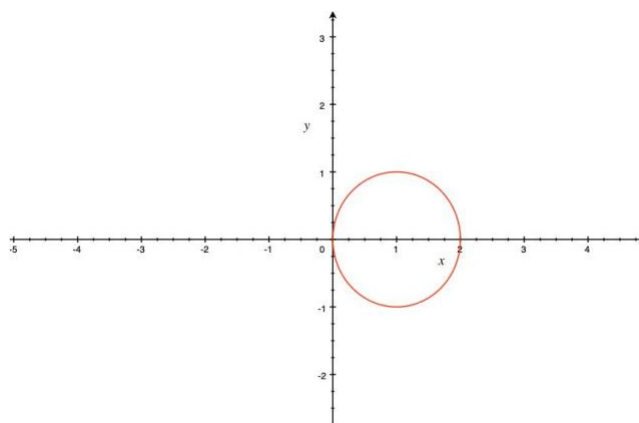


Figura 28. Trayectoria β .
Fuente: Elaboración propia.

Una vez graficadas ambas trayectorias, las podemos superponer en un mismo sistema de ejes coordenados y observar si las trayectorias se intersecan o no.

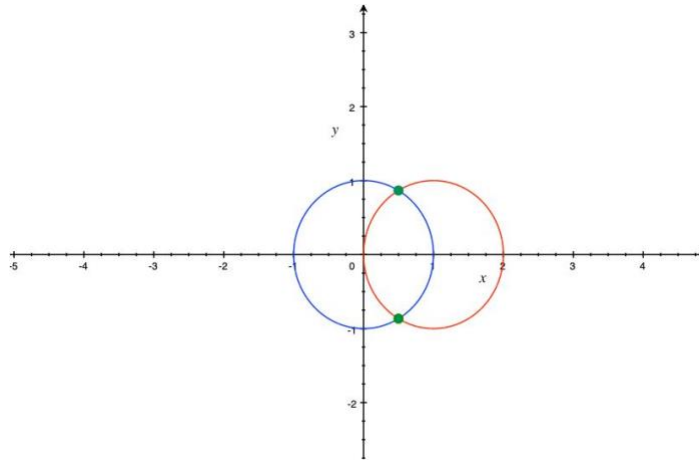
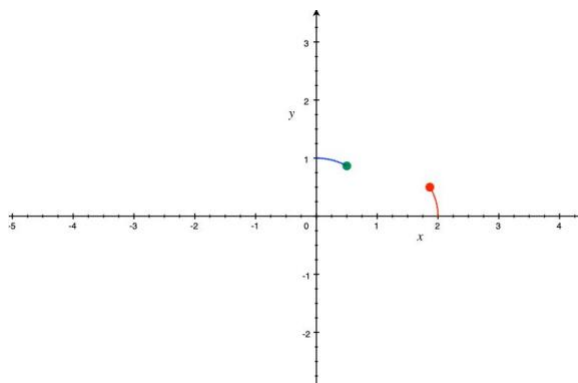


Figura 29. Trayectoria α y β en el mismo plano.

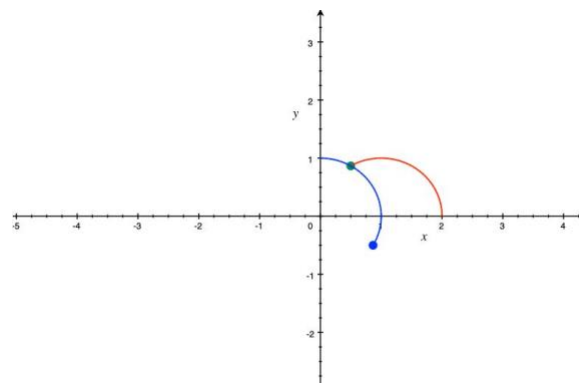
Fuente: Elaboración propia.

Como se puede apreciar en la Figura 29, las curvas se intersecan en dos puntos con coordenadas $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $Q = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. En este punto, una primera reflexión es que, efectivamente, las trayectorias que dibujan cada una de las funciones vectoriales se cruzan en dos puntos, pero ¿es suficiente para afirmar que los objetos se chocan en algún instante? La respuesta es negativa. La condición de que las trayectorias se intercepten es una condición necesaria pero no suficiente, debido a que los objetos pueden pasar por los puntos de intersección en distintos instantes y, por lo tanto, no chocar. Por tal motivo, además de encontrar los puntos de intersección, necesitamos determinar el instante en que los objetos pasan por dichos puntos. La dificultad de este ejercicio radica en la complejidad de representar el tiempo en un dibujo estático. La representación gráfica de la imagen de una función vectorial es la trayectoria final que recorre el objeto a lo largo del tiempo definido en el dominio. Pero si dibujásemos segundo a segundo cada trayectoria, corroboraríamos que las trayectorias se cruzan en momentos diferentes y, por consiguiente, los objetos no se chocan. Un desarrollo algebraico nos ayuda a confirmar que la trayectoria definida por α pasa por el punto P cuando $t = \frac{\pi}{6}$, mientras que la trayectoria

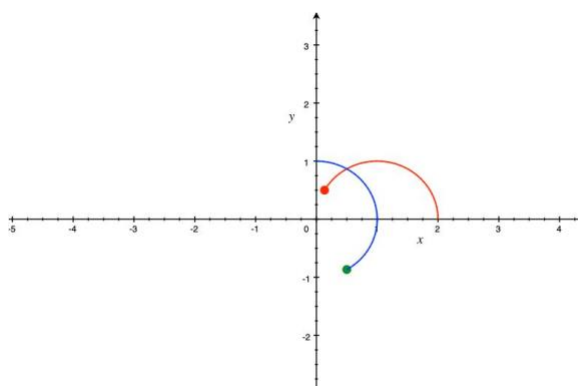
definida por β lo hace cuando $t = \frac{2\pi}{3}$. De un modo similar, la trayectoria definida por α pasa por el punto Q cuando $t = \frac{5\pi}{6}$, y la trayectoria definida por β lo hace cuando $t = \frac{4\pi}{3}$.



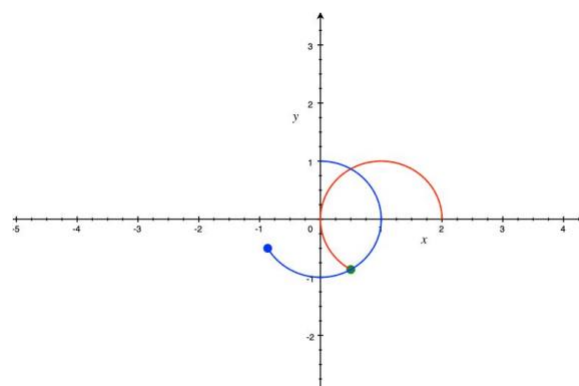
a) $t = \frac{\pi}{6}$



b) $t = \frac{2\pi}{3}$



c) $t = \frac{5\pi}{6}$



d) $t = \frac{4\pi}{3}$

Figura 30. Trayectorias en diferentes instantes.

Fuente: Elaboración propia

La Figura 30 muestra ambas trayectorias en distintos instantes y permite apreciar cómo los objetos están en diferentes posiciones al mismo instante, aunque estas se intersecan.

¿Cómo se enseña matemática tradicionalmente? Una mirada desde el TRD.

La enseñanza de la Matemática (al igual que la de muchas otras disciplinas) suele hacerse a través de una clase magistral. El docente, basado en su experiencia y su conocimiento, tiene la libertad de seleccionar las herramientas didácticas a su disposición para enseñar un concepto en particular. Por predilección, en la gran mayoría de las clases, es habitual que se recurra al pizarrón como el material didáctico por excelencia. Si bien la computadora y otras herramientas tecnológicas se han empezado a usar con mayor frecuencia, no se las suele elegir la primera opción a la hora de dar clase. Utilizar recursos tecnológicos implica, sin duda, un esfuerzo adicional que debe incluir la planificación de la clase teniendo en cuenta estas nuevas herramientas y contar con aulas adecuadas y equipos suficientes para emplear dichos recursos.

En el caso de las actividades planteadas en las páginas anteriores, si se sigue una línea tradicional, los objetos geométricos se escribirán y graficarán en un pizarrón, por lo tanto, las representaciones quedarán plasmadas en un plano. En el caso de la Actividad 1, es notoria la dificultad de representar en un pizarrón un objeto tridimensional, sumado a la dificultad de hacerlo con dos objetos tridimensionales que interactúan entre sí, y aún más, ¡representar dos objetos que no se corten entre sí! (Las figuras reproducidas antes fueron realizadas con facilidad mediante la computadora). En la Actividad 2, representar en un pizarrón de manera dinámica de qué manera las trayectorias se van dibujando conforme pasa el tiempo es una tarea desgastante porque implica realizar diferentes gráficos que representen cómo las partículas se van moviendo a cada instante.

Desde luego que hay quienes realizan una excelente presentación magistral que incluye gráficos o figuras bien realizadas, pero, si nos situamos desde la perspectiva de los estudiantes, es complicado para ellos comprender situaciones geométricas que ocurren en el espacio tridimensional si están dibujadas en el plano; lo mismo ocurre con algunas nociones que incluyen variables temporales cuando son enseñadas/aprendidas por primera vez.

De la misma forma, los estudiantes escriben, por lo general, los contenidos desarrollados en clase en hojas de papel, aunque cada vez más se observa la utilización de tabletas digitales o computadoras para organizar los apuntes. La manera tradicional de anotar los contenidos es un espejo de lo realizado por los docentes en el pizarrón, lo que dificulta aún más, en algunos casos, la comprensión de algunos contenidos; y, además, vuelve más complicado compartir información con sus pares o con los docentes.

Desde el punto de vista del TRD y haciendo un análisis de las relaciones establecidas entre los componentes durante la experiencia de enseñanza-aprendizaje, podemos analizar variadas situaciones.

Desde la posición del estudiante, hay dos caminos posibles para llegar al saber (si consideramos al saber como algo tangible, algo a lo que se puede llegar o acceder): el primero se realiza a través del docente (que denominaremos $C_1 = \text{Estudiante, Docente, Saber}$); el segundo es directo (que denominaremos $C_2 = \text{Estudiante, Saber}$).

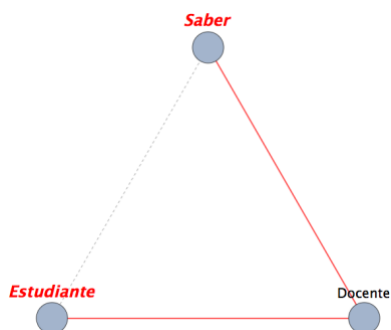


Figura 31. Camino C_1

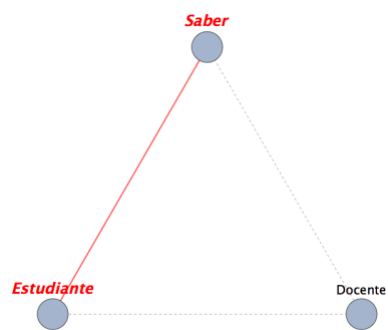


Figura 32. Camino C_2

Fuente: Elaboración Propia

En el caso de las actividades planteadas, se observa que hay una interacción entre el estudiante y el docente mediante el camino C_1 . Fue el docente quien diseñó la actividad de aprendizaje; luego, representó los objetos geométricos en el pizarrón y, finalmente, dio una clase magistral para transmitir su conocimiento. Este camino es el tradicional, no solo el que se suele usar para explicar los conceptos relacionados con las Actividades 1 y 2 mostradas aquí, sino el habitual en las clases de Matemática, en general. Aún más, este es el camino de transmisión de conocimiento que, por lo general, se observa en la mayoría de las clases universitarias.

Ahora bien, si el estudiante quisiera recorrer el camino C_2 para lograr el mismo objetivo que con C_1 , ¿con qué herramientas contaría?

Al considerar C_2 , en principio, no contaría con las herramientas didácticas que diseñó el docente ni con los gráficos particulares que realizó con la intención de lograr el objetivo de transmitir el contenido propuesto; se vería en la necesidad de buscar herramientas que le permitan entender los conceptos por su cuenta y de una mejor manera.

El TRD muestra que el estudiante se encuentra limitado a solo dos opciones para alcanzar el objetivo de aprender un concepto (o de alcanzar el saber). Esto nos lleva a formularnos nuevas preguntas: ¿es esta situación un reflejo de las interacciones didácticas que se observan en la actualidad?, ¿son suficientes estos dos caminos para el estudiante?, ¿es posible brindarles más caminos a los estudiantes para que lleguen al saber?

Si nos centráramos en el lugar del docente, encontraríamos que, dentro del marco del TRD, existen dos caminos posibles que lo conectan con el estudiante. Estos, más allá de vincular dos vértices de la relación que queremos modelar, nos indican la manera y las herramientas en que estos dos vértices se comunican. En el caso del TRD, la comunicación entre dos vértices del triángulo ocurre en ambas direcciones, es decir que cuando consideramos la relación existente entre docente y estudiante, asumimos que esta relación ocurre en ambos sentidos y que, además, cada uno de los vértices del TRD está conectado con los otros dos vértices, lo que nos lleva a concluir que, para cada vértice, en el TRD no existen más de dos caminos distintos para conectarse con otro vértice.

5. Elaboración del modelo.

PROPUESTA DEL MODELO: EL TETRAEDRO DIDÁCTICO (TED)

Una de las premisas más importantes de la presente tesis es mostrar la relevancia que se le da al conjunto de herramientas tecnológicas y de información con las que contamos en la actualidad. Cuando nos referimos a herramientas tecnológicas y de comunicación, apuntamos a una amplia gama de *software* y *hardware* que colaboran con el proceso de enseñanza-aprendizaje. Estas herramientas superan en capacidad y notoriedad a las herramientas didácticas

tradicionales de manera tal que adquieren un valor y lugar propio, por lo tanto, les asignaremos el lugar que nos permite analizar la transfiguración del TRD en el nuevo modelo planteado, el TED.

La tecnología, más allá de una herramienta didáctica

Desde la perspectiva del triángulo pedagógico tradicional, las herramientas didácticas aparecen implícitas en la arista que conecta al docente con el estudiante. Es el docente quien selecciona las herramientas didácticas que cree necesarias para impartir cierto conocimiento. Tradicionalmente, las herramientas didácticas que se utilizan están limitadas al uso de recursos físicos, como el pizarrón, algún objeto tridimensional con el que se pueda maniobrar o algún recurso visual. La pregunta que surge, entonces, es si las herramientas tecnológicas van a pasar a ser parte de ese grupo de recursos didácticos o si tienen un valor que las ubica en otro plano distinto del convencional. En esta tesis, se considera que las herramientas tecnológicas traspasan en valor a las herramientas didácticas convencionales en varios sentidos. En especial, por la capacidad que tienen para comunicar, y esto ya las eleva a un plano diferente del de las herramientas didácticas convencionales.

Entre las características distintivas, podemos enunciar:

- La capacidad de funcionar como un ente que conecta a los distintos miembros de una comunidad de aprendizaje. Esto lo podemos observar en el uso de programas como Microsoft Teams o Zoom que permiten, a docentes y a estudiantes, conectarse a clases virtuales y comunicarse entre ellos; y de ese modo, habilitar la interacción y cooperación entre pares. Asimismo, el uso de estas herramientas faculta la comunicación con personas que se encuentran fuera del entorno geográfico local, nos referimos a la posibilidad de

relacionarse con personas de todo el mundo que permitan el acceso a nuevas formas de analizar una problemática o de entender el contenido que se pretende enseñar/aprender.

- La capacidad de crear contenido. Esta capacidad de las herramientas tecnológicas proporciona la viabilidad de crear modelos, ilustraciones o materiales varios que permiten que los conceptos sean apropiados de maneras diferentes a las tradicionales, tanto para docentes como estudiantes. Como ejemplo, en esta tesis, se discute acerca de la representación tridimensional de objetos en la computadora y, al mismo tiempo, la animación de conceptos relacionados con funciones vectoriales que representan la posición y movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria.

Estas características nos muestran que, a diferencia de las herramientas didácticas convencionales –que actúan de manera pasiva en el proceso de enseñanza-aprendizaje–, las herramientas tecnológicas son una entidad activa en este proceso. Son herramientas “con vida propia” en el sentido de que pueden actuar en el proceso de enseñanza-aprendizaje aun en ausencia del docente y de que permiten un proceso de aprendizaje constante de los estudiantes y la comunicación entre ellos, que motiva diversos modelos pedagógicos de enseñanza como, por ejemplo, el aprendizaje basado en equipos (TBL, por sus siglas en inglés). Algunas investigaciones han mostrado que los estudiantes comprometidos colaborativamente en discusiones y reflexiones críticas con un propósito en común tendrán más probabilidades de lograr una experiencia educativa exitosa (Garrison, Anderson, y Archer, 1999).

Consideraciones previas

En el planteamiento del TED, se contemplan las siguientes consideraciones:

- El modelo propuesto no se considera una crítica al modelo clásico del triángulo didáctico, sino una extensión que refleja la realidad actual, en la que las tecnologías de la información y la comunicación han impactado con notoriedad en el ámbito educativo. En particular, es de interés para este modelo mostrar las nuevas interacciones que se realizan en los procesos de enseñanza-aprendizaje por medio de herramientas tecnológicas.
- Las definiciones respecto a “la forma” o “el diseño” del modelo son entendidas dentro del marco de la topología. Con ello, lo que se pretende es que las cuestiones visuales del modelo no sean consideradas y que la atención se centre en las relaciones estructurales entre los nodos que interactúan.
- En este marco de la topología, definimos cuatro nodos: Docente, Estudiante, Saber y Tecnología. Esta tesis no tiene puesto el interés en definir o argumentar desde una perspectiva filosófica el significado de estos nodos, sino que los entendemos de una manera práctica:
 - Docente: Persona a cargo del proceso de enseñanza. Guía al estudiante para que logre el objetivo de la enseñanza. Experto en la temática que enseña.
 - Estudiante: Persona que quiere cumplir el objetivo de la enseñanza.
 - Saber: Aquello que se quiere enseñar/aprender.
 - Tecnología: En este nodo, se reúnen todas las herramientas tecnológicas que tanto docente como estudiante utilizan como medio para comprender el saber. Este nodo abarca desde el *software* y el *hardware* hasta el conjunto de tecnologías de la información y la comunicación.

- Definimos también cuatro aristas que conectan los cuatro vértices. Dichas aristas, pensadas como objetos topológicos, representan la interacción entre los nodos. Esta interacción es interpretada de diferentes maneras según qué nodos están relacionados.

Es importante considerar que el TED se concibe como un modelo conceptual y no como un modelo científico. Los modelos conceptuales juegan un papel crucial en la investigación educativa al facilitar la comprensión de interacciones y relaciones complejas que de otro modo serían difíciles de describir en palabras (Jones & Pellegrini, 1996). El TED no busca ser un instrumento para generar hipótesis científicas o para llevar a cabo pruebas empíricas, sino proporcionar una representación visual intuitiva de la complejidad de las relaciones entre el alumno, el docente, el conocimiento y la tecnología en el entorno educativo actual. Este tipo de modelos se usan a menudo en la investigación educativa (Stake, 1995). Su propósito es proporcionar un marco de referencia para comprender y analizar las dinámicas y tensiones del proceso de enseñanza y aprendizaje en un contexto cada vez más influenciado por la tecnología.

En cuanto a la validez de proponer un modelo conceptual en lugar de un modelo científico, dicha práctica es común en la investigación en ciencias sociales y educación. Debido a que estas disciplinas suelen abordar fenómenos complejos y multifacéticos, un modelo conceptual puede contribuir a representar y entender dichas complejidades de manera accesible y útil (Maxwell, 2005).

Propuesta de Modelo

Luego del recorrido precedido, así también como de las observaciones hechas en las actividades esbozadas, plantearemos el modelo didáctico que incorpora a la tecnología como un

vértice en la relación Docente-Estudiante-Saber. Este modelo extiende el esquema tradicional planteado por el TRD, pero tiene por objetivo representar las situaciones pedagógicas que involucran herramientas tecnológicas.

El núcleo central del planteamiento de este nuevo modelo está en la transfiguración que el cambio de geometría TRD $\rightarrow$ TED produce en la estructura del aprendizaje y de la enseñanza de cierto contenido en particular. Este cambio estructural no está ligado ni se reduce a las actividades planteadas, sino que estas son estructuralmente apropiadas para explicar las modificaciones que un nuevo nodo introduce en la relación establecida por el TRD.

El TED parte del modelo clásico del triángulo didáctico al que se le agrega un vértice que agrupa las herramientas tecnológicas utilizadas en el proceso de enseñanza/aprendizaje. En el TRD, estas herramientas didácticas están implícitas, son los recursos que usa el docente cuando quiere transmitir cierta información, por ejemplo, pizarrón, trabajos prácticos, actividades de laboratorio, entre otros.

Como se ha discutido con anterioridad, y se evidencia en el Capítulo 3, las herramientas tecnológicas difieren de las tradicionales en muchos aspectos, especialmente, en la capacidad de interacción directa entre el estudiante y la herramienta sin la presencia del docente, esto abre nuevas posibilidades de interacción y de comunicación en el proceso de enseñanza y, por ello, necesita ser representado como un nodo adicional.

La adición de un nuevo nodo al triángulo clásico supone una estructura topológica distinta de la del triángulo; y la forma en la que este nodo se conecta con el triángulo, también, da lugar a diferentes grafos posibles, como se muestra en la Figura 33. Nuestro interés es brindar el grafo que mejor representa las interacciones de enseñanza-aprendizaje actual.

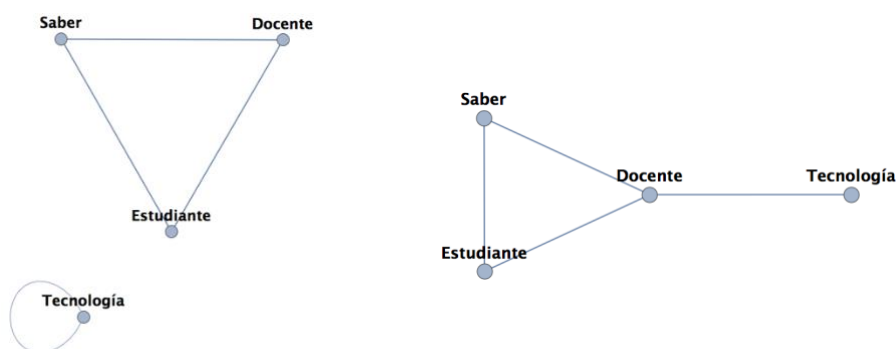


Figura 33. Grafo de 4 nodos.

Fuente: Elaboración propia

El grafo de la izquierda, en la Figura 33, muestra el nuevo vértice que representa a la tecnología, pero se encuentra aislado de los otros nodos. Naturalmente, esta no es la situación real porque comprobamos, en el desarrollo de esta tesis, que las herramientas tecnológicas pueden vincularse con el TRD para explicar conceptos.

El grafo de la derecha, en la Figura 33, añade una arista que conecta a la tecnología con el docente, y nos muestra la relación que el docente establece con diferentes herramientas, como computadoras o tabletas digitales; así como también, con cursos en línea o páginas web propias de la institución. Se puede apreciar así algunas de las oportunidades que las instituciones educativas tienen a su alcance para mejorar la relación enseñanza-aprendizaje. Esta arista nueva, que conecta al docente con la tecnología, nos indica que es necesario considerar varios aspectos. Por un lado, el costo económico que supone brindar estas herramientas a todos los docentes; por el otro, la formación profesional necesaria para manejarlas de forma que colaboren en la transmisión de los conocimientos y que no se conviertan en un elemento que obstaculice la tarea.

En este último grafo, se agrega una nueva arista que permite que docente y estudiante interactúen directamente con la herramienta tecnológica, pero esta no está conectada en forma

directa con el saber. Es decir, esta representación implica que el saber y la herramienta tecnológica solo pueden estar conectados si, primero, esta interactúa con el docente o con el estudiante; sin embargo, esto difiere de la realidad, ya que el saber debería estar conectado con la herramienta tecnológica. Sabemos que el conocimiento se crea en comunidad y que depende del esfuerzo de muchos; y que, finalmente, se traduce en el desarrollo de nuevos descubrimientos. Esta interacción de la que hablamos hoy ocurre de manera global y se desarrolla de manera digital a través de Internet. Por eso, más allá de la ausencia o presencia del docente o del estudiante, la tecnología y el saber aparecen conectados cuando se estudia la situación real, una abstracción de la realidad, lo que nos lleva a agregar una nueva arista, que genera un grafo como el que se observa en la Figura 34.

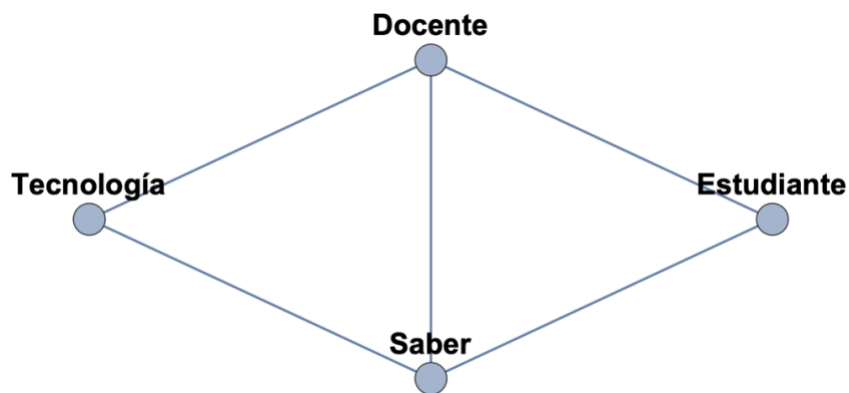


Figura 34. Grafo de 4 nodos, construcción del TED.

Fuente: Elaboración propia.

La adición de esta nueva arista, que conecta a la tecnología con el saber, implica la consideración de nuevas relaciones y situaciones. Por un lado, la credibilidad de la información

que circula por Internet. En los últimos años, se ha visto cómo se ha expandido exponencialmente la falsa información y la presencia de contenidos que no han sido verificados por expertos. Esto redundante de manera significativa en cómo se genera o desarrolla el saber *online*, lo que puede impactar en el aprendizaje si no se controla. Por otro lado, la inteligencia artificial (AI, por sus siglas en inglés). Según la UNESCO, en la actualidad, la inteligencia artificial tiene el potencial de abordar algunos de los desafíos más grandes en educación, innovar las formas y prácticas de enseñar y aprender y acelerar el progreso hacia el cumplimiento del cuarto objetivo de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS4).

Dicho objetivo pretende garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos. La UNESCO afirma que el empleo de tecnologías que involucren la inteligencia artificial debería tener como propósito mejorar las capacidades y proteger los derechos, el aprendizaje, el trabajo y el desarrollo sostenible. En particular, según la UNESCO, la conexión entre inteligencia artificial y educación envuelve tres áreas: aprendizaje con inteligencia artificial (es decir, el uso de herramientas tecnológicas basadas en inteligencia artificial en las aulas), aprendizaje acerca de inteligencia artificial (aprender acerca de las tecnologías y técnicas) y preparación para la inteligencia artificial (permitir a todos los ciudadanos entender mejor el potencial impacto de la inteligencia artificial en la vida de los seres humanos).

Para finalizar, observando nuevamente el grafo de la Figura 34, vemos cómo el estudiante y la tecnología están conectados a través de diversos caminos, pero ninguno de manera directa, lo cual difiere de realidad. Hoy, muchos estudiantes acceden a Internet o usan computadoras para realizar actividades que no involucren solo situaciones de aprendizaje o tareas relacionadas con su educación, sino que lo hacen como una forma de estar comunicados con sus pares o para estar

informados sobre temas generales, entre otras tantas actividades. Por esta razón, hemos agregado una sexta arista que conecta al estudiante con la tecnología, lo que genera la representación de un nuevo modelo, como se observa en la Figura 35. De acuerdo con esto, en esta tesis, se sostiene que el grafo que mejor representa las relaciones actuales en el proceso de enseñanza y aprendizaje en las aulas es el de la Figura 35: un grafo completo K_4 , o como lo denomina de forma más sencilla, el modelo del Tetraedro Didáctico, TED.

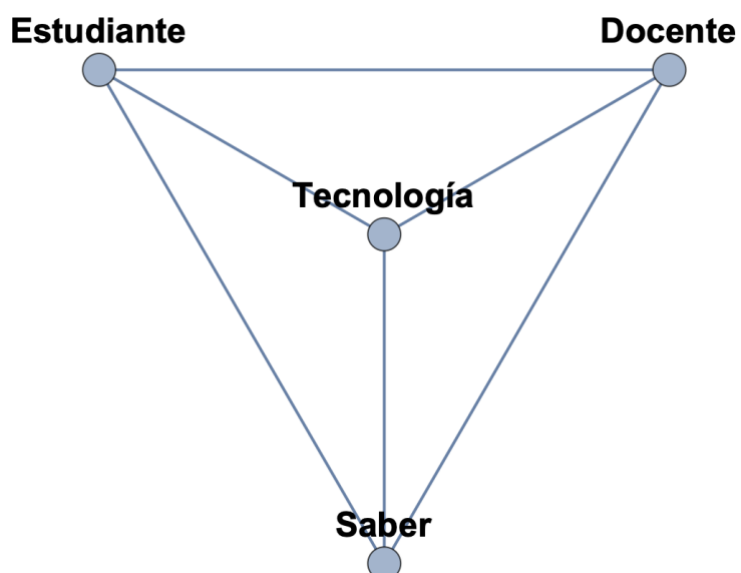


Figura 35. Modelo TED.

Fuente: Elaboración propia.

CARACTERÍSTICAS DEL MODELO

Nuevas interacciones didácticas y de aprendizaje. Uso de la Tecnología en la enseñanza de la matemática: Una mirada desde el TED.

En el modelo tradicional, la cantidad de caminos es bastante limitada. Pensemos, por ejemplo, en las posibilidades que tiene cada estudiante para abordar un tema y comprenderlo. La primera opción es a través de una manera directa; y la segunda, a través del docente. Si pensamos en el nuevo modelo, la cantidad de caminos aumenta a cinco: los dos anteriores más los caminos Estudiante-Tecnología-Saber, Estudiante-Tecnología-Docente-Saber y Estudiante-Docente-Tecnología-Saber.

Estas alternativas son la puerta de entrada a nuevas formas de aprendizaje-enseñanza que ya ocurren en la actualidad, pero que no están explicitadas en el triángulo didáctico tradicional. En las actividades didácticas planteadas, se pueden observar estos caminos nuevos. A modo de ejemplo y para poder visualizar estas interacciones, a continuación, se plantea una nueva mirada –desde la perspectiva del TED– sobre las actividades que aparecen en la inmersión inicial de este proyecto. Estas experiencias fueron aplicadas en la UADE en las clases de Álgebra y Geometría analítica y en las de Análisis matemático a partir del estudio realizado por Bravo y Patiño (2016) en pro de mejorar la comprensión de conceptos relacionados con rectas y planos en el espacio tridimensional, sumado al interés de mejorar la efectividad de la enseñanza de algunos conceptos de Matemática en los primeros años de universidad y al crecimiento del uso de computadoras e Internet en las aulas.

En la Actividad 1, el objetivo central es analizar cómo las rectas se pueden ubicar en el espacio tridimensional y cuál es la diferencia de hacerlo en el espacio plano. Como se manifestó,

la dificultad radica en la visualización que se hace tradicionalmente del espacio tridimensional en el plano (en general, dibujado en el pizarrón). En el caso de la Actividad 2, la dificultad consiste en generar un gráfico dinámico que evolucione en el tiempo. Por esto, en estas actividades, se opta por utilizar herramientas tecnológicas que permitan manipular de una manera dinámica las diferentes representaciones de las rectas en el espacio tridimensional, así como también funciones vectoriales y el gráfico de su respectiva curva imagen. Al presente, son variados los programas que permiten dicha interacción y muchos se ofrecen gratuitamente. Entre los más conocidos y usados, están Geogebra, Grapher, Desmos, por nombrar algunos. La primera tarea a la que se enfrenta el docente es la elección de una herramienta tecnológica adecuada para su uso en la clase, por lo que podríamos decir que, en el TED, se manifiesta una primera relación entre el nodo tecnológico y el docente.

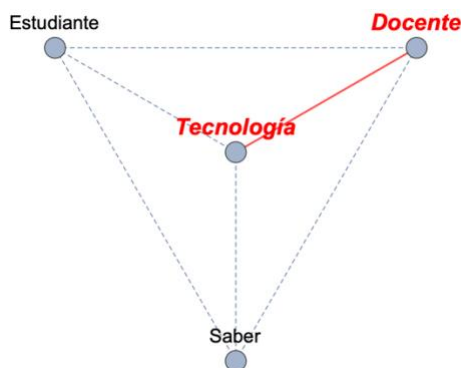


Figura 36. Relación Docente-Tecnología en el TED.

Fuente: Elaboración propia

La manifestación de esta relación implica, para el docente, una revisión de las herramientas tecnológicas pertinentes para usar en sus clases y, para las instituciones educativas, ofrecerlas.

En el caso específico de la experiencia realizada en la UADE, las aulas cuentan con la computadora y con el *hardware* necesario para proyectar la pantalla. En especial, se cuenta con proyectores *video beam* y computadoras con sistema operativo macOS, por eso, se decidió utilizar el programa de gráficos Grapher, que permite realizar distintas representaciones gráficas de funciones en 2 o 3 dimensiones tanto en forma paramétrica como en forma cartesiana.

Una vez seleccionada la herramienta tecnológica, el segundo paso es utilizarla para explicar determinado contenido; en el TED, este segundo proceso está representado por el camino Docente-Tecnología-Saber.

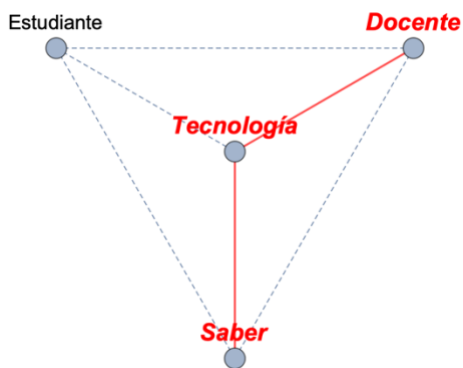


Figura 37. Relación Docente-Tecnología-Saber en el TED.

Fuente: Elaboración propia

Este camino considera, entonces, la construcción de la herramienta didáctica para explicar un concepto en particular. En el ejemplo de la Actividad 1, por medio del *software* Grapher es posible obtener las gráficas de los objetos geométricos involucrados en el espacio tridimensional. No solo se pueden dibujar, sino también, se puede manipularlos y observarlos desde diferentes perspectivas para una mejor comprensión de la situación de la intersección de rectas. De igual modo, con el mismo *software*, es posible realizar el gráfico de la curva imagen de una función

vectorial y utilizar una animación de cómo la partícula representada por la función vectorial se mueve a lo largo de la trayectoria cuando pasa el tiempo.

Algo importante por considerar, en este camino, es que no siempre la misma herramienta tecnológica es útil para enseñar conceptos distintos, por lo tanto, podría haber cierta dificultad en el paso de la arista Docente-Tecnología a la arista Tecnología-Saber. En la primera, el docente encuentra varias opciones de herramientas tecnológicas con las que debe familiarizarse y para las que se tiene que capacitar. En la segunda, debe seleccionar, según su criterio y experiencia, cuáles de las herramientas tecnológicas disponibles se adaptan más y permiten una mejor comprensión del concepto que va a explicar. En general, no suele ser una tarea sencilla y requiere de tiempo de navegación por Internet para evaluar las opciones que existen.

Por último, tenemos una arista más que recorrer para llegar al estudiante y concluir el camino estudiado. Es decir, ahora completamos la relación Docente-Tecnología-Saber-Estudiante.

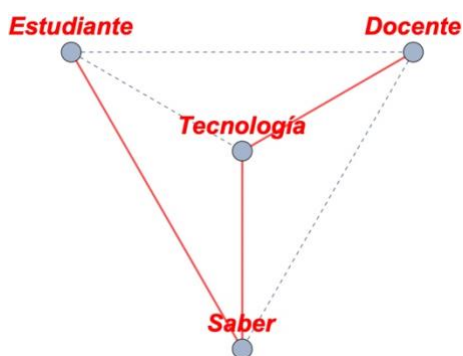


Figura 38. Relación Docente-Tecnología-Saber-Estudiante.

Fuente: Elaboración Propia.

Esta relación se observa cuando las herramientas tecnológicas seleccionadas ayudan a construir las herramientas didácticas que se usarán para enseñar cierto contenido. En nuestro ejemplo, esto se manifiesta cuando el docente utiliza los instrumentos digitales que le permiten graficar por computadora las correspondientes imágenes de planos y rectas en el espacio tridimensional (Grapher, en este caso). Además de dibujarlas, puede interactuar con dichos objetos para que se pueda lograr una mejor comprensión de cómo los objetos tridimensionales interactúan; y así, los estudiantes tendrán nuevas oportunidades de aprendizaje.

De esta manera, hemos analizado uno de los nuevos caminos establecidos por el TED que no ocurren en el TRD. Sumado a él, podríamos preguntarnos por las diferentes configuraciones existentes en el TED, por ejemplo, si tomamos el camino Estudiante-Tecnología-Saber, el estudiante puede interactuar directamente con las herramientas didácticas creadas por el docente sin la necesidad de que él esté presente como mediador. En la actualidad, se observa cómo la tecnología permite compartir de manera sencilla contenidos o creaciones y dejarlos disponibles para la comunidad para que luego esta los analice, transforme o mejore. Ejemplos de estas relaciones son manifestados en el *Software Open Source* o de código abierto, que es el *software* que permite acceso completo al código fuente del programa, lo que autoriza el estudio de su funcionamiento y la adaptación correspondiente a las necesidades de cada uno, a lo que se agrega la difusión de copias a terceros con las alteraciones desarrolladas. Este tipo de interacción directa entre estudiante y tecnología admite el desarrollo de nuevos saberes como consecuencia de la experiencia realizada por el estudiante aún en ausencia del docente.

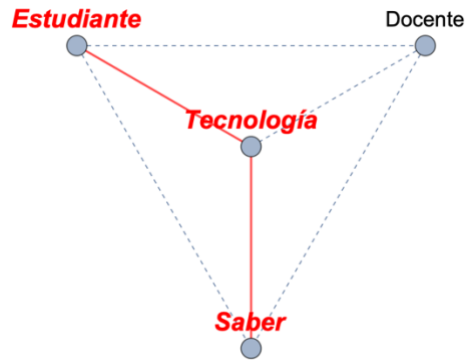
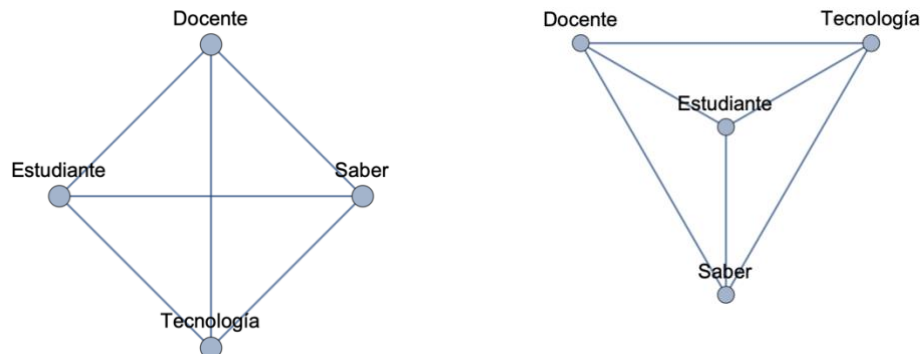


Figura 39. Relación Estudiante-Tecnología-Saber.

Fuente: Elaboración propia.

La forma en el TED

Como se ha mencionado, la intención del modelo propuesto es analizar las conexiones existentes entre los distintos actores de la relación enseñanza-aprendizaje –Estudiante, Docente y Saber– cuando se anexa un cuarto nodo correspondiente a la tecnología. Lo que llevó a considerar el modelo desde una perspectiva topológica es el interés por analizar la estructura de la relación; de este modo, la forma, en un sentido geométrico, no es de relevancia para el diseño del modelo. Entonces, los posibles diseños del modelo pueden ser variados, como los que se muestran en la Figura 40.



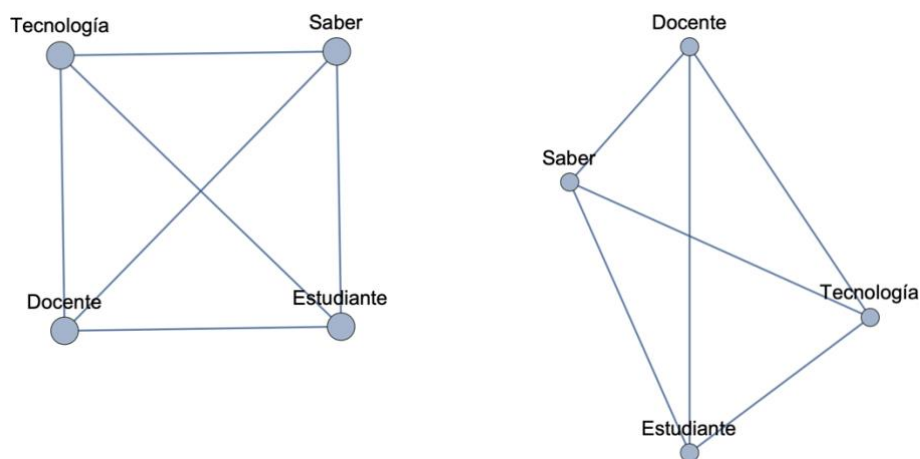


Figura 40. Diferentes representaciones del modelo TED.

Fuente: Elaboración Propia.

Desde un punto de vista matemático, la diferencia entre las formas que puede tomar el modelo lleva a que el nombre adecuado de esta representación sea la de un grafo completo K_4 , como se explicó en el Capítulo 1, en la sección de teoría de grafos. Debido a la particularidad de esta denominación, nos referimos al modelo como el Modelo del Tetraedro Didáctico (TED), porque es una figura más reconocida, aunque no exclusivamente en el ámbito de la Matemática. Cabe sin embargo aclarar, una vez más, que el modelo no está pensado como una estructura rígida con una forma geométrica específica.

El modelo TED como una extensión del TRD

Algo que se puede apreciar del modelo TED es que contiene en una dimensión menor al TRD. Esto significa que, al analizar las conexiones que resultan al eliminar uno de los vértices, se generan cuatro relaciones didácticas diferentes, una de las cuales es el TRD.

- **TRD al reducir el nodo tecnológico.**

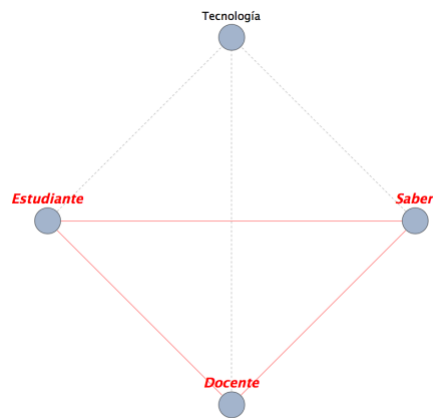


Figura 41. TRD inmerso en el TED.

Fuente: Elaboración propia.

Como ya se mencionó, si olvidamos el nodo tecnológico, bajo esta restricción, el TED resulta igual al modelo del triángulo didáctico convencional. Este resultado es algo que se considera importante en el desarrollo del modelo TED porque lo que se pretende no es realizar una crítica o modificación al triángulo didáctico, sino modificarlo y expandir sus conexiones cuando se agrega el nodo tecnológico.

- **Relación Docente-Tecnología-Estudiante al reducir el nodo del saber**

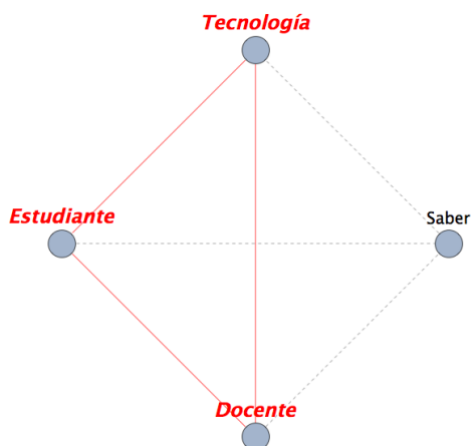


Figura 42. Relación Docente-Tecnología-Estudiante dentro del TED.

Fuente: Elaboración propia.

Al examinar el TRD bajo esta restricción, es posible analizar la forma en que los docentes y estudiantes se comunican mediante el uso de la tecnología, aunque no siempre esta comunicación se relacione con la transmisión de un concepto. A modo de ejemplo, los docentes manejan los sistemas de gestión de aprendizaje (o conocidos por sus siglas en inglés LMS, *learning management system*) que son las páginas virtuales de las clases, a través de las que les es posible acceder a información general del curso: asistencia a clases, documentos relacionados con la materia, bibliografía y mucha más información. A la vez, estas herramientas le brindan al estudiante la oportunidad de comunicarse con el docente de manera sencilla a través de foros o de mensajes directos.

- **Relación Docente-Tecnología-Saber al reducir el nodo del estudiante**

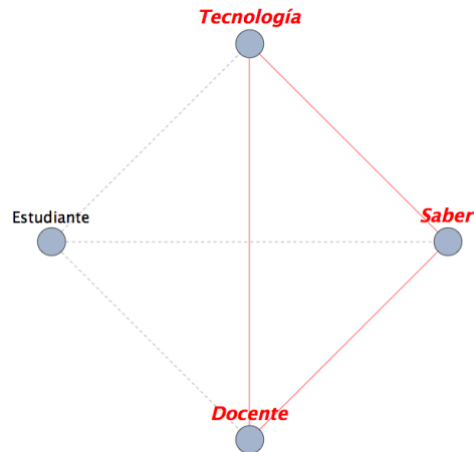


Figura 43. Relación Docente-Tecnología-Saber dentro del TED.

Fuente: Elaboración propia.

En esta configuración, es viable realizar un estudio de la forma en que los docentes usan las herramientas tecnológicas para generar actividades didácticas o para buscar información relacionada con los conceptos que tienen que enseñar. Un ejemplo de esta relación se aprecia en las Actividades 1 y 2, en la inmersión inicial, al inicio de este capítulo, en las que se plantea la utilización de herramientas didácticas. En ese caso, es el docente quien, antes de desarrollar la clase, crea por medio de herramientas digitales los gráficos y las animaciones necesarias para enseñar los conceptos de intersecciones de rectas en $\mathbb{R}^3$ o de intersección de partículas dadas por una función vectorial, respectivamente.

- **Relación Estudiante-Tecnología-Saber al reducir el nodo del docente**

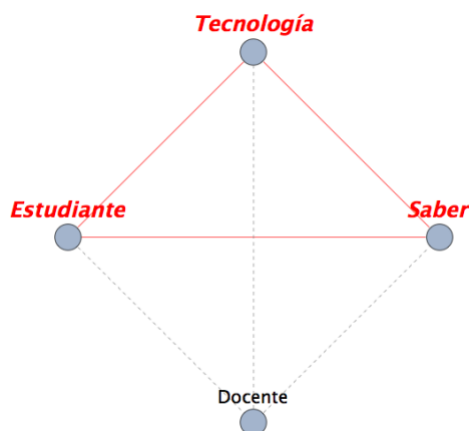


Figura 44. Relación Estudiante-Tecnología-Saber dentro del TED.

Fuente: Elaboración propia.

A partir de esta situación, se puede analizar cómo el estudiante es capaz de utilizar las herramientas tecnológicas a su alcance para comprender determinado concepto. Como se vio en las situaciones didácticas de la inmersión inicial, al principio de este capítulo, los estudiantes pueden utilizar las animaciones o los gráficos por su cuenta, manipularlos e intentar comprender los conceptos sin la necesidad de que haya un docente presente. Un ejemplo son las grabaciones de las clases *online*. En muchos cursos, es habitual que las clases se graben con el objetivo de que estén disponibles para los estudiantes, y esto les permite estudiar a su propio ritmo y cuando lo necesiten.

CONCLUSIONES

PRINCIPALES ASPECTOS QUE SURGEN DE LA INVESTIGACIÓN

El análisis exhaustivo de nuestro estudio proporciona una visión renovada del papel de las tecnologías emergentes en la transformación de la pedagogía, destacando cómo estas modifican y expanden las relaciones fundamentales que definen el proceso de enseñanza-aprendizaje. Al reinterpretar el triángulo didáctico de Houssaye, hemos identificado varias conclusiones clave que amplían nuestra comprensión de estos cambios.

Primero, el modelo conceptual presentado, observado desde una perspectiva topológica, enfatiza la importancia de las conexiones y la estructura del grafo completo en lugar de su forma geométrica. Este enfoque, inspirado en la teoría de grafos, permite una interpretación dinámica y versátil de las interacciones en el aula, exponiendo una variedad de rutas de comunicación y aprendizaje antes inexploradas (Bishop, 2015). Nuestro modelo, al agregar un cuarto vértice para la tecnología, extiende el alcance del triángulo didáctico de Houssaye, revelando nuevas posibilidades y beneficios para la enseñanza y el aprendizaje (Trouche, 2004).

Segundo, nuestra investigación destaca el papel transformador que juegan las herramientas tecnológicas en el proceso educativo. Al desplazarlas de una posición pasiva a una activa, resaltamos cómo estas herramientas modifican el triángulo didáctico, revolucionando la forma en que docentes, estudiantes y contenidos interactúan (Rabardel & Bourmaud, 2003). Esta alteración no solo afecta la naturaleza de la enseñanza y el aprendizaje, sino que también introduce desafíos sociales y económicos, especialmente en áreas con acceso limitado a estas tecnologías, como se evidencia en varias regiones de América Latina y el Caribe (Resta & Laferrière, 2007).

Por último, los ejemplos didácticos presentados en nuestra tesis demostraron la eficacia de la integración de tecnologías en la enseñanza de conceptos matemáticos, en particular aquellos que requieren una sólida comprensión del pensamiento geométrico y espacial (Artigue, 2002).

Aunque nuestro estudio se centró en aplicaciones específicas dentro de la matemática, la generalización de estos hallazgos a otras disciplinas científicas y contextos educativos es prometedora y requiere investigaciones futuras.

Esta tesis, por lo tanto, contribuye a la creciente literatura que reevalúa la didáctica en la era digital, destacando la necesidad de incorporar de manera activa las herramientas tecnológicas en el diseño de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Este trabajo debe considerarse un punto de partida para futuras investigaciones que continúen explorando las consecuencias de la integración de la tecnología en la didáctica.

PREGUNTAS ABIERTAS Y FUTURAS INVESTIGACIONES

En la elaboración del modelo presentado, es posible notar algunas relaciones que justificarían un análisis más extenso y que, por el momento, se plantean como posibles caminos de futuras investigaciones. Se destacan:

- Un análisis de la arista que conecta la tecnología con los estudiantes lleva a considerar el costo que implica la adquisición de la herramienta tecnológica. Entonces, ¿es esta arista exclusiva para un grupo de privilegiado?

Es importante considerar que, en la mayoría de los países de Latinoamérica, el acceso a Internet o a la adquisición de computadoras es bastante limitado. Según datos del Banco Mundial, en 2021, alrededor del 46% de la población de América Latina y el Caribe tuvo

conectividad de banda ancha, y solo el 9,9% cuenta con fibra de alta calidad en el hogar. Esto sitúa a la región por debajo de Europa Oriental (57% de acceso a conectividad banda ancha), Europa Occidental (87%) y la región del Asia-Pacífico (59%). Esta brecha en el acceso a Internet y a herramientas digitales crece con gran magnitud cuando se comparan las áreas rurales de la región, donde solo 4 de 10 personas tienen opciones de conectividad, con las áreas urbanas, en las que el acceso es de alrededor del 71% de la población.

Otro factor determinante es el costo de los planes de datos en la región, ya que costos desproporcionadamente altos para ciertas poblaciones vulnerables pueden dar lugar a nuevas formas de disparidad en una región que ya es desigual.

- Uno de los usos más relevantes de la teoría de grafos es la posibilidad de modelar las interacciones sociales de un grupo de individuos de una región conectados mediante determinada relación. Este análisis de redes sociales permite estudiar ciertos fenómenos sociales. En especial, sería de interés analizar la interacción que existe entre distintos grupos educativos que pueden conectarse a través de determinada herramienta tecnológica como un problema abierto a considerar en futuras investigaciones. Esto es, suponiendo que un grupo A y un grupo B, cada uno representado por su propio TED, están conectados por una arista a sus respectivos vértices de la tecnología (como lo muestra la Figura 45), es posible analizar cómo diferentes grupos educativos están relacionados y, con ello, generar información que permita mejorar el sistema educativo de una sociedad. El concepto de grupo, en este caso, puede ser entendido desde varias perspectivas: un único estudiante con su docente y un concepto; de forma más global, una clase con un grupo docente y determinados conceptos; o una institución educativa completa.



Figura 45. Conexión de dos grupos mediante el nodo tecnológico.
 Fuente: Elaboración propia.

- Esta forma de analizar las relaciones sociales mediante la teoría de grafos ha sido de gran utilidad en distintas ramas de las ciencias sociales y del comportamiento, así como en ramas de las ciencias exactas, como la matemática, la estadística y las ciencias de la computación. Resulta de interés, en este marco, el estudio de “la divisa social” o *social currency*, que permite analizar la influencia de una institución o de un negocio en determinada red social, sea esta en comunidades virtuales o reales, y el grado en el cual la información de esa institución es compartida por otros. En particular, es de interés observar “el vértice más valioso” de un grafo, que consiste en observar cuál de los vértices proporciona más conexiones con otros miembros de la relación. Este análisis podría ser de ayuda para motivar la colaboración entre instituciones educativas en beneficio de los estudiantes y de la región en la que se encuentran.

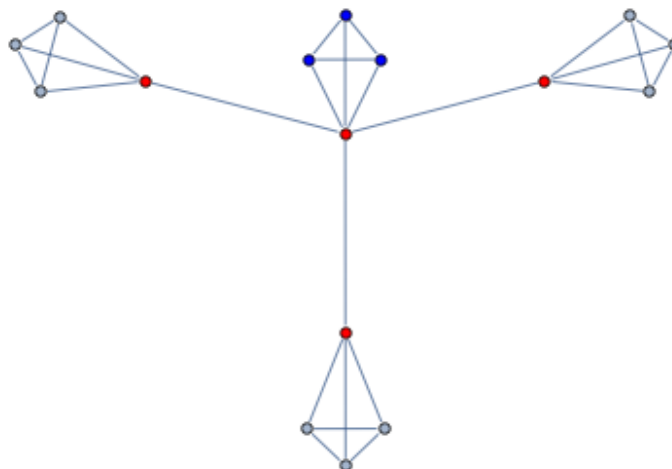


Figura 46. Conexión de cuatro grupos mediante el nodo tecnológico.
Fuente: Elaboración propia.

La Figura 46 muestra una conexión entre cuatro grupos, todos conectados por medio de la tecnología. Se aprecia cómo el nodo de la tecnología, correspondiente al grupo azul, constituye el vértice más valioso en la relación, pues este se conecta con los otros tres grupos de manera directa y, por lo tanto, se podría analizar cuál es la influencia que este grupo ejerce sobre los demás y cómo esto beneficia a estudiantes o docentes del grupo.

- El principal objetivo de la presente tesis es el de establecer las interacciones estructurales introducidas por el vértice correspondiente a la tecnología en la relación clásica establecida por el TRD, pero aún quedan por fuera análisis relacionados con el significado de los caminos posibles por recorrer en el TED. Por ejemplo, en el Capítulo 4, se explicó un caso particular con las actividades propuestas en la inmersión inicial de este proyecto en las que se recorría el camino Docente-Tecnología-Saber-Estudiante, quiere decir que la conexión final es la que ocurre entre Docente y Estudiante. La pregunta que puede surgir es si otros caminos que conectan estos dos vértices representan de hecho una

aproximación diferente de cómo se presenta o enseña un contenido o si ambos caminos resultan, en realidad, semejantes. Este supuesto de semejanza entre caminos parece ser de interés para próximas investigaciones.

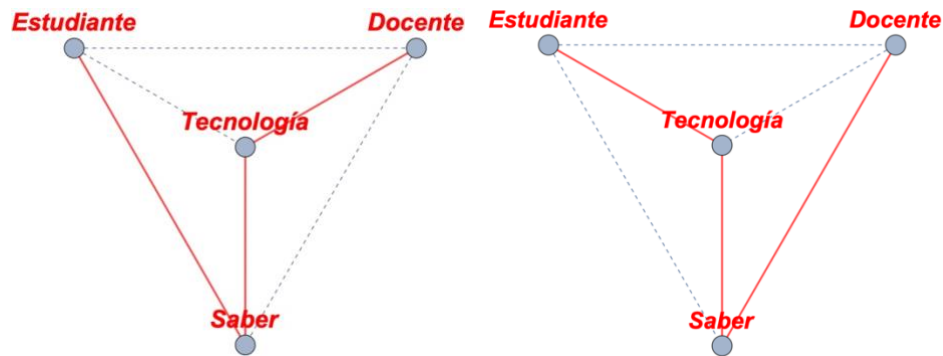


Figura 47. Diferentes caminos que conectan Docente con Estudiante.
 ¿Son los dos caminos semejantes? Fuente: Elaboración propia.

- En la propuesta del modelo TED, se considera que las relaciones ocurren simétricamente, es decir que cuando estudiamos la arista que conecta dos vértices, suponemos que esto implica que ambos vértices están interactuando en los dos sentidos, el resultado es que el modelo presentado es un grafo. Una pregunta natural que puede surgir es si las relaciones que ocurren son simétricas; en otras palabras, ¿es realmente la relación Docente-Estudiante la misma que Estudiante-Docente?

Esta nueva pregunta llevaría a pensar que el modelo TED puede ahora ser considerado como un dígrafo (como fue definido en el Capítulo 1, en la sección correspondiente a la teoría de grafos) y, de esta manera, podrían ser consideradas diferentes configuraciones del modelo TED, cada una con sus propias características, y, con este modelo, podrían ser explorados nuevos caminos de investigación.

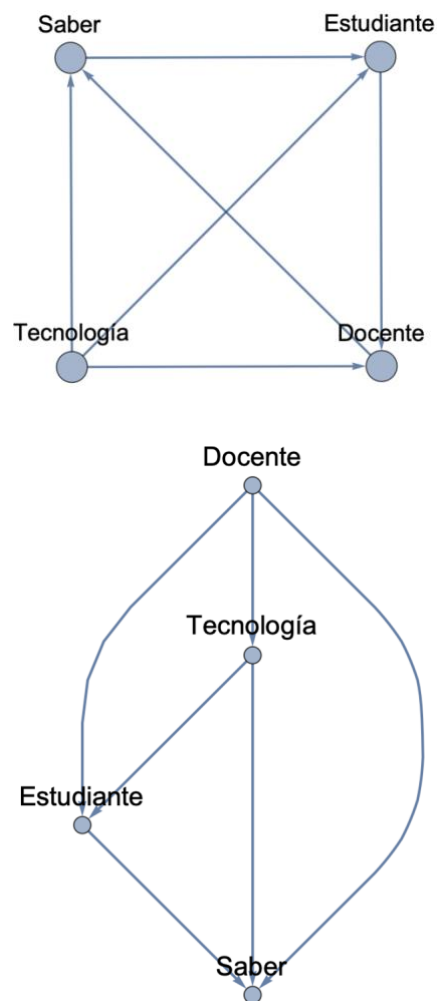


Figura 48. Diferentes configuraciones de dígrafos TED.
Fuente: Elaboración propia.

BIBLIOGRAFÍA

- Artigue, M. (2002). *Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work*. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7(3), 245-274.
- Banco Mundial. (2018). *Datos Banco Mundial*. Obtenido de [bancomundial.org: https://datos.bancomundial.org/indicador/IT.NET.USER.ZS?end=2018&locations=AR&start=1960&view=chart](https://datos.bancomundial.org/indicador/IT.NET.USER.ZS?end=2018&locations=AR&start=1960&view=chart)
- Bates, A. W., & Sangrà, A. (2011). *Managing Technology in Higher Education. Strategies for Transforming Teaching and Learning*. Jossey-Bass.
- Battista, M. T. (2007). *The development of geometric and spatial thinking*. Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.
- Berners Lee, T., Hendler, J., & Lassila, O. (2001). The Semantic Web. *Scientific American*, 29-37.
- Bertrand, Y. (1980). *Les modèles éducationnels*. Montréal: Service pédagogique de l'université de léducation.
- Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (Eds.). (2010). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Springer.
- Bishop, J. (2015). *Mathematics Education and Graph Theory*. Springer.
- Bower, M. (2008). *Affordance analysis – matching learning tasks with learning technologies*. Educational Media International.
- Bravo, V., & Patiño, J. (2016). Análisis de los errores de los alumnos en el concepto de recta y plano en álgebra y geometría analítica. *Atlante, Cuadernos de Educación y Desarrollo*.
- Britain, S., & Liber, O. (2004). *A framework for pedagogical evaluation of virtual learning environments*. Obtenido de <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00696234/document>
- Bunge, M. (1985). *Teoría y Realidad*. Barcelona: Editorial Ariel.
- Campbell, J., & Oblinger, D. (2007). Academic Analytics: A New Tool for a New Era. *Educause*, 40-57.
- Carvajal Villaplana, Á. (2002). Teorías y Modelos: Formas de representación de la realidad. *Comunicación*, 12(001).
- Castells, M. (1999). *La era de la información. Traducción de Carmen Martínez Gimeno* (Vol. 1). México: Siglo XXI Editores.
- Chartrand, G., & Zhang, P. (2012). *A first course in graph theory*. Dover Publications.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Contreiras, G., Filho, F., Rocha de Souza, S., Barros, G., & Santos, J. (2018). Mathematics as a supporting tool for technological management. *International journal of Advanced Engineering Research and Science (IJAERS)*, 5(5), 1-13.
- Contreras Oré, F. (2012). La evolución de la didáctica de la matemática. *Revista Horizonte de la ciencia*, 2(2).
- Corbin, J., & Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Sage publications.
- Crossley, M. (2010). *Essential Topology*. Springer.
- Dietrich, M. & Schmidt, C. (2019). *Graph Theory and Network Analysis in the Classroom: An Empirical Study of 12th Grade Students*. Journal of Mathematics Education at Teachers College.

- Drucker, P. (1993). *La sociedad poscapitalista*. Traducción de María Isabel Merino Sánchez. Buenos Aires: Sudamericana.
- Echeverría, J. (1999). *Introducción a la metodología de la ciencia. La filosofía de la ciencia en el siglo XX*. Madrid: Ediciones Cátedra.
- Eppler, M. J., & Aeschmann, M. (2009). *A systematic framework for conceptual visualizations in knowledge communication*. In Proceedings of the I-KNOW'09 and I-SEMANTICS'09.
- Elena Arias Ortiz, G. E. (2021). *Educación superior y COVID-19 en América Latina y el Caribe: financiamiento para los estudiantes*. Banco Interamericano de Desarrollo.
- Farnós Miró, J. D. (2011). Las redes sociales en la educación. Su aprovechamiento y potencial desde las aulas. *Revista Mexicana de Comunicación*, 24(127), 29-33.
- Fournier, J.-C. (2013). *Graph Theory and Applications*. London: John Wiley.
- Galazzi, L. (2015). Modelos teóricos para conceptualizar la enseñanza: algunas consideraciones críticas acerca del "triángulo pedagógico". *Paideia: Revista de filosofía y didáctica filosófica*(102).
- Garrison, D. R., Anderson, T., & Archer, W. (1999). Critical Inquiry in a Text-Based Environment: Computer Conferencing in Higher Education. *The Internet and Higher Education*, 87-105.
- Godfrey-Smith, P. (2006). *The strategy of model-based science*. *Biology and Philosophy*, 21(5), 725-740.
- Grisales-Aguirre, A. M. (Julio de 2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado*, 14(2), 198 - 214.
- Gvirtz, S., & Palamidessi, M. (2008). *El ABC de la tarea docente: Currículum y enseñanza*. Buenos Aires: Aiqué.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, M. (2014). *Metodología de la Investigación*. McGraw Hill.
- Herrington, J., Oliver, R., & Reeves, T.C. (2003). *Patterns of engagement in authentic online learning environments*. *Australian Journal of Educational Technology*, 19(1), 59-71.
- Houssaye, J. (1988). *Le triangle pédagogique. Théorie et pratiques de l'éducation scolaire*. Peter Lang.
- Ibáñez Bernal, C. (2007). Un análisis crítico del modelo del triángulo pedagógico. Una propuesta alternativa. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 12(32).
- Jankvist, U. T., & Misfeldt, M. (2019). *Theoretical decomposition and combinatorial considerations when working with relations*. *Educational Studies in Mathematics*.
- Jonassen, D. (2000). *Toward a design theory of problem solving*. *Educational technology research and development*, 48(4), 63-85.
- Jones, M. G., & Pellegrini, A. D. (1996). *The role of narrative in constructing shared mental models*. En D. I. Miller & J. E. Readence (Eds.), *Literacy and Learning: Analysis of Instructional Paradigms* (pp. 9-23). New York, NY: Teachers College Press.
- Kieran, C. (2007). *Learning and teaching algebra at the middle school through college levels*. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*.
- Macho Stadler, M. (2002). *¿Qué es la topología?* Obtenido de <http://www.ehu.es/~mtwmastm/sigma20.pdf>
- Maxwell, J. A. (2005). *Conceptual framework: What do you think is going on?* *Qualitative Research Design: An Interactive Approach*, 41, 33-64.
- Monod-Ansaldi, R., Dietrich, M., & Rinaudo, J. L. (2020). *Graph theory for studying teachers' centrality in classroom interaction*. *International Journal of STEM Education*.

- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.
- OCDE. (6 de Diciembre de 2016). *PISA 2015 Results*. Obtenido de OCDE Web Site: <https://www.oecd.org/education/pisa-2015-results-volume-i-9789264266490-en.htm>
- Parraguez, M., Rojas, J., & Vásquez, P. (s.f). Situaciones a-didácticas para la enseñanza-aprendizaje de estrategias de conteo utilizando la resolución de problemas como medio.
- Rabardel, P., & Bourmaud, G. (2003). *From computer to instrument system: a developmental perspective*. *Interacting with Computers*, 15(5), 665-691.
- Resta, P., & Laferrière, T. (2007). *Technology in Support of Collaborative Learning*. *Educational Psychology Review*, 19(1), 65-83.
- Sartori, G. (1998). *Homo Videns: La Sociedad Teledirigida*. Madrid: Santillana.
- Serrano González-Tejero, J. M., & Pons Parra, R. M. (2007). La concepción constructivista de la instrucción. Hacia un replanteamiento del triángulo interactivo. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 13(38).
- Sierra Bravo, R. (1984). *Ciencias sociales. Epistemología, lógica y metodología*. Madrid: Paraninfo.
- Sowa, J. F. (2000). *Knowledge representation: logical, philosophical, and computational foundations*. Brooks Cole Publishing Co.
- Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Sage.
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). *Facilitating the transition from empirical arguments to proof*. *Journal of Mathematics Teacher Education*.
- Sugumaran, V., & DeGroote, J. (2011). *Spatial decision support systems: principles and practices*. CRC press.
- Suppe, F. (2000). *Understanding scientific theories: An assessment of developments, 1969-1998*. *Philosophy of Science*, 67, S102-S115.
- Trouche, L. (2004). *Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding student's command process through instrumental orchestrations*. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281-307.
- Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (2019). *The 'resource' question in mathematics education*. Springer.
- UNESCO. (2005). *Hacia las sociedades del conocimiento. Informe Mundial de la UNESCO*.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques. Institut de recherche mathématiques de Rennes*, 10(23), 133-170.
- Voogt, J., Erstad, O., Dede, C., & Mishra, P. (2013). *Challenges to learning and schooling in the digital networked world of the 21st century*. *Journal of Computer Assisted Learning*, 29(5), 403-413.
- Wartofsky, M. (1968). *Introducción a la filosofía de la ciencia. Traducción de Magdalena Andreu, Francisco Carmona y Victor Sánchez*. Madrid: Alianza editorial.
- World Economic Forum. (2020). Obtenido de The World Economic Forum: <https://www.weforum.org/agenda/2020/04/coronavirus-education-global-covid19-online-digital-learning/>
- Zill, D. (1997). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Sexta Edición*. International Thomson Editores.
- Zoom. (2022). *Zoom Investors*. Obtenido de Zoom: <https://investors.zoom.us/financial-information/annual-reports>

